MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Conf. dr. ing. ADRIAN TRAIAN MURGAN
Ș. l. dr. ing. IULIA SPÂNU
Ș. l. ing. INGE GAVĂT
Ș. l. dr. ing. ISTVAN SZȚOJANOV
Ș. l. dr. ing. VICTOR EMIL NEAGOE
Ș. l. dr. ing. ADRIANA VLAD
Coordonator: prof. dr. ing. ALEXANDRU SPĂTARU

TEORIA TRANSMISIUNII INFORMAȚIEI

• probleme

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ—BUCUREȘTI
1983

Lucrarea a fost analizată și aprobată de colectivul Catedrei de Electronică Aplicată, de Consiliul Profesoral al Facultății de Electronică și Telecomunicații și de Biroul Senatului Institutului Politehnic-București

Contribuția autorilor:

Cap. 1 — **I. Sztojanov**
Cap. 2 — **I. Gavăt**
Cap. 3 — **I. Spânu**
Cap. 4 — **A. Vlad**
Cap. 5 — **A. T. Murgan**
Cap. 6 — **V. E. Neagoe**

Redactor: ing. *Monica Ursea*
Tehnoredactor: *Vergilia Rusu*
Grafician: *Wegeman Victor*

PREFAȚĂ

Culegerea de față este destinată în primul rînd studenților electroniști, dar poate fi utilă și absolvenților în preocupările cărora intră probleme legate de transmiterea informației.

Scopul urmărit este să se pună la dispoziția cititorilor probleme tipice de teoria codurilor, transmiterea semnalelor aleatoare, teoria modulației și a deciziilor statistice. Lucrarea reprezintă o culegere de aplicații la principalele capitole ale cursului „Teoria transmisiunii informației" ediția 1983—autor prof. dr. ing. Al. Spătaru. Pentru facilitatea utilizării culegerii, fiecare capitol începe prin prezentarea succintă a noțiunilor teoretice necesare pentru soluționarea problemelor.

Deoarece această culegere de probleme a fost elaborată în aceeași perioadă cu cursul „Teoria transmisiunii informației", acesta nu a fost menționat în bibliografie, consultarea și citarea lui fiind de la sine înțelese.

Deși culegerea nu are un caracter exhaustiv—domeniul fiind foarte vast, ea poate avea un rol important în înțelegerea și aprofundarea acestei discipline. Majoritatea problemelor sînt rezolvate pentru a permite urmărirea metodologiei corespunzătoare; la sfîrșitul fiecărui capitol sînt propuse probleme spre rezolvare.

Autorii țin să-i mulțumească prof. dr. ing. Al. Spătaru pentru interesul și eficiența cu care a coordonat întreaga activitate legată de elaborarea lucrării de față.

AUTORII

CUPRINS

Cap. 1. Surse, canale și receptoare de simboluri discrete 5

Introducere teoretică 5
Probleme rezolvate 12
Probleme propuse 40

Cap. 2. Coduri 44

Introducere teoretică 44
Probleme rezolvate 51
Probleme propuse 97

Cap. 3. Semnale aleatoare și transmiterea lor prin sisteme liniare și neliniare 99

Introducere teoretică 99
Probleme rezolvate 105
Probleme propuse 125

Cap. 4. Detecția semnalelor și estimarea parametrilor 127

Introducere teoretică 127
Probleme rezolvate 132
Probleme propuse 154

Cap. 5. Estimarea formei semnalului 160

Introducere teoretică 160
Probleme rezolvate 165
Probleme propuse 213

Cap. 6. Modulația 218

Introducere teoretică 218
Probleme rezolvate 233
Probleme propuse 267

CAPITOLUL 1

SURSE, CANALE ȘI RECEPTOARE DE SIMBOLURI DISCRETE

INTRODUCERE TEORETICĂ

A. Surse discrete fără memorie

O asemenea sursă *se caracterizează printr-un număr finit de stări în care se generează simbolurile* x_i *de durată* τ_i *cu probabilitățile* $p(x_i)$. Notăm:

$$[X] = [x_1, x_2, \ldots, x_n];$$

$$\tau = [\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n];$$

$$\mathbf{P} = [p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)].$$

Cantitatea de informație obținută prin apariția unui simbol x_i va fi:

$$I(x_i) = -\log_2 p(x_i) \text{ [bit]}.$$

Pentru **caracterizarea surselor din punct de vedere informațional** se folosesc următoarele **mărimi**:

- *entropia sursei* (informație medie/simbol)

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_2 p(x_i) \text{[bit/simbol]}, \tag{1.1}$$

a cărei valoare maximă este:

$$H_{max}(X) = \log_2 n \text{ [bit/simbol]}; \tag{1.2}$$

- *debitul de informație al sursei*

$$H_t = \frac{H(X)}{\bar{\tau}} \text{ [bit/simbol.s]}, \tag{1.3}$$

unde

$$\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot \tau_i;$$

- *redundanța sursei*

$$R(X) = H_{max}(X) - H(X) \text{ [bit/simbol]}; \tag{1.4}$$

- *eficiența sursei*

$$\eta(X) = \frac{H(X)}{H_{max}(X)}. \tag{1.5}$$

B. Surse continue

Un semnal de bandă limitată w și durată finită T se poate scrie sub forma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{2wT} x\left(\frac{k}{2w}\right) \cdot \frac{\sin 2\pi w\left(t - \frac{k}{2w}\right)}{2\pi w\left(t - \frac{k}{2w}\right)}$$

sau, sub formă vectorială,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

unde $\alpha_k = x\left(\frac{k}{2w}\right)$ și $n = 2wT$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Spațiul semnalului cuantizat cu Δq *generat de o sursă continuă* va fi:

$$[\mathbf{X}] = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N],$$

unde:

$$p(\mathbf{x}_k) = p\{\alpha_1 < x(t_1) \leqslant \alpha_1 + \Delta q, \ldots, \alpha_n < x(t_n) \leqslant \alpha_n + \Delta q\}.$$

Prin analogie cu cazul discret se definește *entropia sursei continue* sub forma:

$$H(\mathbf{X}) = -\int_X p(\mathbf{x}_k)\log_2 p(\mathbf{x}_k)\mathrm{d}x \cdot \tag{1.6}$$

C. Canale de transmisiune discrete

Se notează cu X mulțimea simbolurilor de intrare în canal (cîmpul de intrare), cu Y — mulțimea simbolurilor de ieșire (cîmpul de ieșire), cu $\mathbf{P}(X)$ — probabilitățile simbolurilor de intrare și cu $\mathbf{P}(Y)$ — probabilitățile simbolurilor de ieșire. Se definesc, astfel:

$$[X] = [x_1, x_2, \ldots, x_n];$$

$$\mathbf{P}(X) = [p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)];$$

$$[Y] = [y_1, y_2, \ldots, y_m];$$

$$\mathbf{P}(Y) = [p(y_1), p(y_2), \ldots, p(y_m)].$$

Pentru **caracterizarea canalului din punct de vedere informațional** se definesc următoarele **entropii**:

- *entropia cîmpurilor reunite*

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\log_2 p(x_i, y_j)\ [\text{bit/simbol}]; \tag{1.7}$$

- *entropiile condiționate*

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i/y_j) \text{ [bit/simbol]}; \tag{1.8}$$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log_2 p(y_j/x_i) \text{ [bit/simbol]}; \tag{1.9}$$

Aceste entropii se mai numesc: *echivocație* H(X/Y), respectiv *eroare medie* H(Y/X).

- *transinformația* (informația medie transmisă prin canal)

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \tag{1.10}$$

Se mai folosesc și următoarele relații:

$$H(Y/X) = H(X, Y) - H(X); \tag{1.11}$$

$$H(X/Y) = H(X, Y) - H(Y); \tag{1.12}$$

$$I(X, Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(X) - H(X/Y). \tag{1.13}$$

Probabilitățile care apar în definițiile entropiilor condiționate și respectiv în definiția entropiei cîmpurilor reunite sînt date, de obicei, sub forma unor **matrice de probabilități**:

- *matricea probabilităților reunite intrare-ieșire*

$$\mathbf{P}(X, Y) = \begin{bmatrix} p(x_1, y_1) & p(x_1, y_2) \dots p(x_1, y_m) \\ p(x_2, y_1) & p(x_2, y_2) \dots p(x_2, y_m) \\ \vdots & \\ p(x_n, y_1) & p(x_n, y_2) \dots p(x_n, y_m) \end{bmatrix},$$

cu proprietățile

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1; \quad \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) = p(y_j);$$

$$\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = p(x_i);$$

- *matricele probabilităților condiționate* (numite și *matrice de zgomot* sau *matrice de tranziție*)

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) \dots p(y_m/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) \dots p(y_m/x_2) \\ \vdots & \\ p(y_1/x_n) & p(y_2/x_n) \dots p(y_m/x_n) \end{bmatrix},$$

cu proprietatea

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) = 1;$$

$$\mathbf{P}(X/Y) = \begin{bmatrix} p(x_1/y_1) & p(x_1/y_2) \dots p(x_1/y_m) \\ p(x_2/y_1) & p(x_2/y_2) \dots p(x_2/y_m) \\ \vdots & \\ p(x_n/y_1) & p(x_n/y_2) \dots p(x_n/y_m) \end{bmatrix},$$

proprietatea

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j) = 1.$$

D. Canale de transmisiune continue

Prin analogie cu cazul discret se definesc *entropiile condiționate* și *transinformația*:

$$H(\mathbf{X/Y}) = -\int_X \int_Y p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \log_2 p(\mathbf{x/y}) dx\, dy; \tag{1.14}$$

$$H(\mathbf{Y/X}) = -\int_X \int_Y p(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \log_2 p(\mathbf{y/x})\, dx\, dy; \tag{1.15}$$

$$I(\mathbf{X,Y}) = \int_X \int_Y p(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \log_2 \frac{p(\mathbf{y/x})}{p(\mathbf{y})}\, dx\, dy. \tag{1.16}$$

E. Capacitatea canalelor

Capacitatea C **a unui canal de transmisiune** *reprezintă cantitatea maximă de informație ce se poate transmite pe acel canal.*

Se mai utilizează și noțiunea de **debit informațional al canalului** (C_t), reprezentînd *cantitatea de informație furnizată de acesta în unitatea de timp.*

Se poate scrie relația:

$$C_t = \frac{C}{\bar{\tau}}.$$

○ **Observație.** Dacă $\bar{\tau} = 1$ s, $C = C_t$.

Prezentăm în continuare principalele modele de canale și expresia capacității acestora.

- **Canale discrete:**
- *cazul general*

$$C = \max_{p(x_i)} I(X, Y) = \max_{p(x_i)} [H(Y) - H(Y/X)]; \tag{1.17}$$

• *canal discret dublu uniform,* pentru care matricea de zgomot are aspectul următor:

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 1-p & q & q \ldots q \\ q & 1-p & q \ldots q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q & q & \ldots\ldots 1-p \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

$$C = \log_2 n + (1-p)\log_2(1-p) + (n-1)q \log_2 q; \tag{1.19}$$

• *canal discret binar simetric*:

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}; \tag{1.20}$$

$$C = 1 + (1-p)\log_2(1-p) + p \log_2 p; \tag{1.21}$$

• *canal discret binar (cazul general)*

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}; \tag{1.22}$$

$$C = \log_2 [2^{Q_1} + 2^{Q_2}], \tag{1.23}$$

unde:

$$Q_1 = -q_{11} H(Y/x_1) - q_{12} H(Y/x_2); \tag{1.24}$$

$$Q_2 = -q_{21} H(Y/x_1) - q_{22} H(Y/x_2); \tag{1.25}$$

$$q_{11} = \frac{p_{22}}{\Delta}; \quad q_{12} = -\frac{p_{12}}{\Delta}; \quad q_{21} = -\frac{p_{21}}{\Delta}; \quad q_{22} = \frac{p_{11}}{\Delta}; \tag{1.26}$$

$$\Delta = p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12}. \tag{1.27}$$

Probabilitățile simbolurilor de la intrare pentru care se obține această capacitate rezultă din relațiile:

$$p(x_1) = 2^{-C}[q_{11}\, 2^{Q_1} + q_{12} 2^{Q_2}]; \tag{1.28}$$

$$p(x_2) = 2^{-C}[q_{21}\, 2^{Q_1} + q_{22} 2^{Q_2}]. \tag{1.29}$$

• **Canal continuu**

• *Cazul general.* Capacitatea unui canal continuu se calculează cu ajutorul relației:

$$C = w_R \log_2 (1 - P/N), \tag{1.30}$$

unde s-a notat:
w_R — banda de frecvență a semnalului transmis;
P — puterea semnalului;
N — puterea zgomotului.

Cunoscînd capacitatea canalului, se pot defini:
— redundanța canalului

$$R(C) = C - I(X,Y); \tag{1.31}$$

— eficiența canalului

$$\eta(C) = \frac{I(X, Y)}{C}. \tag{1.32}$$

F. Cazuri particulare

De importanță practică sînt cele două cazuri limită: *canalul fără perturbații* și *canalul cu perturbații mari*. Definim entropiile, transinformația și capacitatea canalului în aceste cazuri.

- **Canal fără perturbații:**

$$H(X/Y) = H(Y/X) = 0;$$
$$H(X) = H(Y) = I(X, Y) = H(X, Y);$$
$$C = \max_{p(x_i)} H(X).$$

- **Canal cu perturbații foarte mari:**

$$H(X/Y) = H(X);$$
$$H(Y/X) = H(Y);$$
$$H(X, Y) = H(X) + H(Y);$$
$$I(X, Y) = 0;$$
$$C = 0.$$

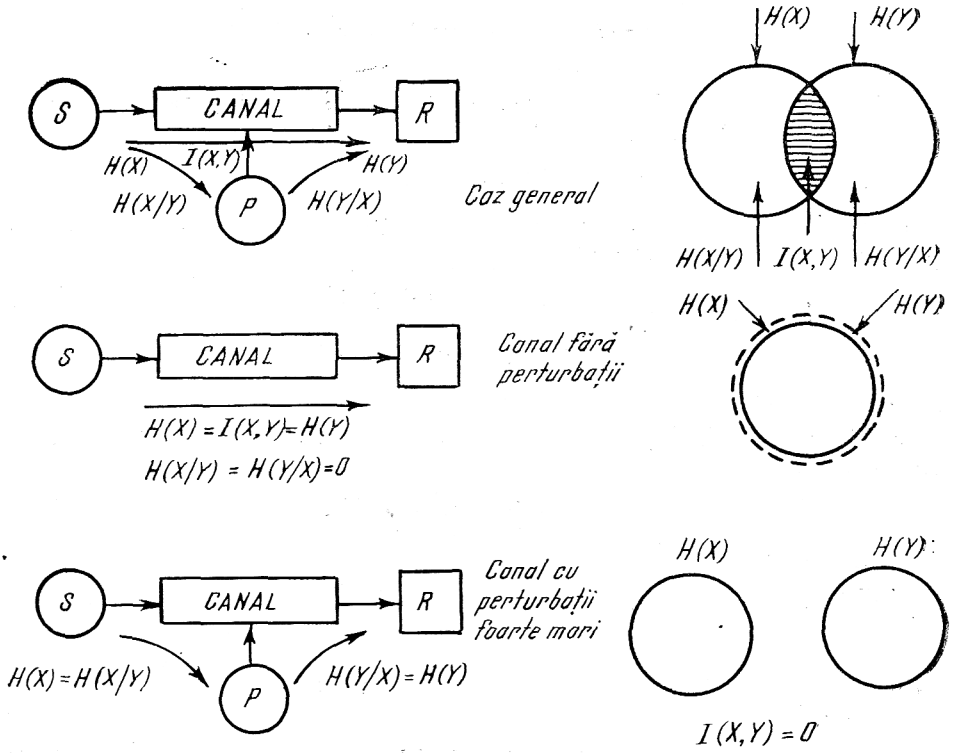


Fig. 1. Modelul trecerii informației pe un canal de transmisiune.

G. Receptoare de simboluri discrete (cazul binar)

Criteriul de optimizare folosit în cazul receptoarelor de simboluri discrete este cel al costului mediu minim, numit *risc* și având expresia:

$$R = \sum_i \sum_j p(x_i x_j)\, C_{ij}. \tag{1.33}$$

● **Partiția simbolurilor recepționate** se face comparînd următoarele două mărimi:

— *raportul de plauzibilitate*:

$$\lambda_k = \frac{p(y_k/x_1)}{p(y_k/x_2)}; \tag{1.34}$$

— *pragul testului*:

$$K = \frac{p(x_2)}{p(x_1)} \cdot \frac{C_{21} - C_{22}}{C_{12} - C_{11}}, \tag{1.35}$$

unde C_{ij} reprezintă costurile de decizie (C_{11} și C_{22} — costurile unor decizii corecte; C_{12} și C_{21} — costurile unor decizii eronate), x_i — simbolul emis, y_k — simbolul recepționat și $\hat{x}_i$ — simbolul estimat.

Dacă $\lambda_k > K$, vom plasa simbolul y_k în submulțimea Y_1, iar dacă $\lambda_k < K$, atunci $y_k \in Y_2$, ceea ce se poate scrie compact în felul următor:

$$\lambda_k \underset{Y_2}{\overset{Y_1}{\gtrless}} K. \tag{1.36}$$

În urma partiției se estimează deci simbolurile $\hat{x}_1$ din Y_1 și $\hat{x}_2$ din Y_2.

● Se definesc următoarele **criterii de partiție**:

● *criteriul riscului minim*:

$$\frac{p(y_k/x_1)}{p(y_k/x_2)} \underset{Y_2}{\overset{Y_1}{\gtrless}} \frac{p(x_2)}{p(x_1)} \frac{C_{21} - C_{22}}{C_{12} - C_{11}}; \tag{1.37}$$

● *criteriul plauzibilității maxime*

$$\frac{p(y_k/x_1)}{p(y_k/x_2)} \underset{Y_2}{\overset{Y_1}{\gtrless}} 1; \tag{1.38}$$

● *criteriul observatorului ideal*

$$\frac{p(y_k/x_1)}{p(y_k/x_2)} \underset{Y_2}{\overset{Y_1}{\gtrless}} \frac{p(x_2)}{p(x_1)}; \tag{1.39}$$

● *criteriul probabilității aposteriori maxime*

$$\frac{p(x_1/y_k)}{p(x_2/y_k)} \underset{Y_2}{\overset{Y_1}{\gtrless}} 1. \tag{1.40}$$

● **Matricea strategiei de decizie** se definește prin

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} p(\hat{x}_1/y_1) & p(\hat{x}_2/y_1) \\ p(\hat{x}_1/y_2) & p(\hat{x}_2/y_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ p(\hat{x}_1/y_m) & p(\hat{x}_2/y_m) \end{bmatrix}. \tag{1.41}$$

● **Matricea de tranziție a canalului echivalent** (intrare în canalul de transmisiune—ieșire din receptorul optimal) — care înglobează canalul propriu-zis și receptorul optimal — este

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}(Y/X) \cdot \mathbf{S}. \tag{1.42}$$

● **Strategia aleatoare minimax.** În cazul unei strategii aleatoare simbolurile recepționate y_k nu sînt atribuite în mod univoc uneia dintre submulțimile Y_1 sau Y_2, ci cu o anumită probabilitate sînt incluse în Y_1 și cu complementul acestei probabilități — în Y_2. Relația (1.33) se mai poate scrie și astfel:

$$R = \sum_i p(x_i) \sum_j p(\hat{x}_j/x_i) C_{ij}. \tag{1.43}$$

Vom numi *risc condiționat* expresia:

$$R(x_i, S) = \sum_j p(\hat{x}_j/x_i) C_{ij}. \tag{1.44}$$

Introducînd relația (1.44) în (1.43) rezultă

$$R = \sum_i p(x_i) R(x_i, S). \tag{1.45}$$

În cazul strategiei minimax se combină în general două strategii cu riscurile condiționate cît mai mici.

Criteriul minimax presupune alegerea acelei coordonate x_i care conduce la valoarea maximă a riscului condiționat și adoptarea acelei strategii care conduce la valoarea minimă a acestui risc:

$$\min_S \max_{x_i} R(x_i, S).$$

PROBLEME REZOLVATE

1.1. *Să se calculeze cantitatea de informație necesară pentru precizarea poziției unei figuri pe o tablă de șah.*

Soluție

O primă posibilitate pentru precizarea poziției unei figuri constă în numerotarea fiecărui pătrat. În total sînt necesare $m = 64$ de cifre. Figura putînd ocupa oricare dintre aceste pătrate, rezultă că pentru precizarea poziției ei va fi necesară o cantitate de informație:

$$I_{fig} = \log_2 1/m = \log_2 64 = 6 \text{ bit.}$$

O a doua posibilitate de a preciza poziția unei figuri constă în cunoașterea coordonatelor sale. În cazul tablei de șah vor fi necesare 8 cifre sau litere pe orizontală și 8 cifre sau litere pe verticală.

Cantitatea de informație necesară pentru precizarea poziției figurii va fi:

$$I_{fig} = -2 \log_2 1/8 = 6 \text{ bit.}$$

1.2. *Fie 12 monede dintre care una este falsă — mai ușoară sau mai grea. Se cere să se determine numărul minim de cîntăriri necesare găsirii monedei false și precizării dacă este mai ușoară sau mai grea. Se presupune că pentru cîntăriri se utilizează o balanță fără greutăți.*

Soluție

O problemă se poate rezolva dacă prin testări sau măsurări se obține o cantitate de informație mai mare sau cel puțin egală cu cantitatea de informație necesară rezolvării problemei.

Cantitatea de informație necesară pentru a preciza care este moneda falsă este:

$$I_1 = -\log_2 1/12 \text{ bit.}$$

La aceasta se mai adaugă o *cantitate de informație necesară pentru a preciza dacă moneda este mai ușoară sau mai grea,* adică:

$$I_2 = -\log_2 1/2 \text{ bit.}$$

Cantitatea totală de informație necesară rezolvării complete a problemei este:

$$I = I_1 + I_2 = \log_2 24 \text{ bit.}$$

Întrucît balanța se caracterizează prin trei poziții, și anume egal, mai mare și mai mic, *cantitatea de informație obținută la o cîntărire* este de:

$$I_3 = -\log_2 1/3 \text{ bit.}$$

Numărul minim de cîntăriri se deduce din condiția ca informația obținută în urma efectuării a „k" cîntăriri, $k I_3$, să fie mai mare decît informația necesară soluționării problemei, I:

$$\log_2 24 \leqslant k \cdot \log_2 3; \quad \log_2 24 \leqslant \log_2 3^k.$$

Ținînd cont că funcția logaritm este o funcție monotonă, rezultă:

$$24 \leqslant 3^k.$$

Primul număr întreg care satisface inegalitatea este $k = 3$. Deci, sînt necesare trei cîntăriri.

1.3. *Fie un alfabet format din literele* A, B, C. *Se cere să se calculeze:*

a) *numărul maxim de mesaje de lungime 3 ce se pot forma cu acest alfabet;*
b) *cantitatea de informație conținută de un asemenea mesaj.*

Soluție

a) Mesajele ce pot fi formate cu acest alfabet sînt în număr de $N = 3^3 = 27$, și anume:

A A A	B A A	C A A
A A B	B A B	C A B
A A C	B A C	C A C
A B A	B B A	C B A
A B B	B B B	C B B
A B C	B B C	C B C
A C A	B C A	C C A
A C B	B C B	C C B
A C C	B C C	C C C

b) Mesajele sînt echiprobabile. Înseamnă că fiecărui mesaj îi corespunde o cantitate de informație:

$$I_{mesaj} = -\log_2 1/27 = \log_2 27 = 4{,}75 \text{ bit.}$$

1.4. *O sursă discretă care generează opt mesaje se caracterizează prin*:

$$[S] = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8];$$

$$\tau = [2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4];$$

$$\mathbf{P} = [1/4, 1/4, 1/8, 1/8, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16].$$

Se cere să se calculeze:

a) *entropia sursei*;
b) *debitul de informație*;
c) *redundanța sursei*;
d) *eficiența sursei.*

Soluție

a) $H(S) = \sum_{i=1}^{18} p(s_i) \log_2 p(s_i) = -1/4 \log_2 1/4 - 1/4 \log_2 1/4 - 1/8 \log_2 1/8 -$

$- 1/8 \log_2 1/8 - 1/16 \log_2 1/16 - 1/16 \log_2 1/16 - 1/16 \log_2 1/16 -$

$- 1/16 \log_2 1/16 = 11/4$ bit/simbol.

b) Folosim relația (1.3). Deoarece

$$\bar{\tau} = 2 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/8 + 3 \cdot 1/8 + 4 \cdot 1/16 +$$

$$+ 4 \cdot 1/16 + 4 \cdot 1/16 + 4 \cdot 1/16 = 11/4 \text{ s/simbol,}$$

rezultă

$$H_t(S) = 1 \text{ bit/s.}$$

c) În conformitate cu relația (1.2) rezultă

$$H_{max}(S) = \log_2 8 = 3 \text{ bit/simbol.}$$

Folosind relația (1.4) se obține:

$$R(S) = 3 - 11/4 = 1/4 \text{ bit/simbol.}$$

d) Din expresia (1.5) se deduce:

$$\eta(S) = \frac{11/4}{3} = 0{,}91.$$

1.5. *Să se evalueze cantitatea de informație obținută prin măsurarea poziției unui punct oarecare* M *pe un segment de dreaptă* AB *de lungime* L, *folosind o unitate de măsură de lungime* Δ (fig. 1.5).

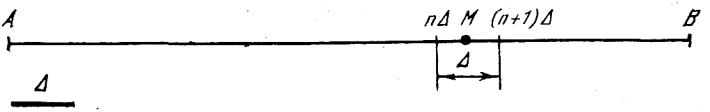


Fig. 1.5. Determinarea poziției punctului M pe dreapta AB cu ajutorul unității de măsură Δ.

Soluție

Pentru a rezolva problema, *trebuie evaluată transinformația pentru cazul canalului continuu*

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = H(\mathbf{X}) - H(\mathbf{X}/\mathbf{Y}).$$

Pentru a putea evalua entropiile în cazul canalului continuu, se consideră un segment ε ($\varepsilon \to 0$) comensurabil atît cu segmentul AB de lungime L, cît și cu unitatea de măsură folosită, Δ. Cu ajutorul lui ε se vor discretiza segmentele AB și Δ în $N = L/\varepsilon$, respectiv $K = \Delta/\varepsilon$ puncte distincte. Inițial punctul M poate ocupa oricare dintre cele N poziții de pe dreapta AB. Rezultă că nedeterminarea inițială va fi

$$H(\mathbf{X}) = \log_2 N = \log_2 \frac{L}{\varepsilon}.$$

După efectuarea măsurării se constată că punctul M se află la „n" intervale Δ de capătul A al segmentului, deci se obține prin măsurare o anumită cantitate de informație prin scăderea incertitudinii de la valoarea inițială $H(\mathbf{X})$ la o valoare $H(\mathbf{X}/\mathbf{Y})$. Incertitudinea rămasă se datorează faptului că după efectuarea măsurării punctul M poate ocupa una dintre cele K poziții din interiorul segmentului Δ. Incertitudinea finală va fi:

$$H(\mathbf{X}/\mathbf{Y}) = \log_2 K = \log_2 \frac{\Delta}{\varepsilon}.$$

Informația obținută în urma procesului de măsurare va fi:

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = H(\mathbf{X}) - H(\mathbf{X}/\mathbf{Y}) = \log_2 \frac{L}{\varepsilon} - \log_2 \frac{\Delta}{\varepsilon} = \log_2 \frac{L}{\Delta}.$$

La limită se obține:

$$H(\mathbf{X}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \log_2 \frac{L}{\varepsilon} \to \infty;$$

$$H(\mathbf{X}/\mathbf{Y}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \log_2 \frac{\Delta}{\varepsilon} \to \infty;$$

$$I(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = H(\mathbf{X}) - H(\mathbf{X}/\mathbf{Y}) = \log_2 \frac{L}{\Delta}.$$

○ **Se observă că,** deși nedeterminările inițială $H(\mathbf{X})$ și finală $H(\mathbf{X/Y})$ tind spre infinit în cazul continuu, totuși, cantitatea de informație obținută efectiv în urma măsurării este finită și cu atît mai mare cu cît unitatea de măsură Δ cu care se face măsurarea este mai mică.

1.6. *La intrarea unui canal de transmisiune se cuplează o sursă care generează simbolurile 1, 2, 3 cu probabilități egale. Perturbațiile de pe canal sînt de așa natură încît 5% din simbolurile transmise se pot transforma cu probabilități egale în oricare dintre simbolurile alfabetului dat.*

Să se determine:

a) *entropia sursei;*
b) *entropiile condiționate;*
c) *entropia cîmpurilor reunite;*
d) *transinformația;*
e) *capacitatea canalului.*

Soluție

Din datele problemei rezultă:

$$p(1) = p(2) = p(3) = 0{,}33;$$

$$p(1/1) = p(2/2) = p(3/3) = 0{,}95;$$

$$p(2/1) = p(3/1) = p(1/3) = p(2/3) = p(1/2) = p(3/2) = 0{,}025;$$

$$p(1,1) = p(2,2) = p(3,3) = 0{,}33 \cdot 0{,}95 = 0{,}316;$$

$$p(1,2) = p(1,3) = p(2,3) = p(3,1) = p(2,1) = p(3,2) =$$
$$= 0{,}33 \cdot 0{,}025 = 0{,}0083.$$

Matricele de probabilități care caracterizează canalul vor fi:

$$\mathbf{P}(X, Y) = \begin{bmatrix} 0{,}316 & 0{,}0083 & 0{,}0083 \\ 0{,}0083 & 0{,}316 & 0{,}0083 \\ 0{,}0083 & 0{,}0083 & 0{,}316 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(X/Y) = \mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}025 & 0{,}025 \\ 0{,}025 & 0{,}95 & 0{,}025 \\ 0{,}025 & 0{,}025 & 0{,}95 \end{bmatrix}$$

a) Folosim relația (1.1) și obținem:

$$H(X) = \log_2 3 = 1{,}58 \text{ bit/simbol.}$$

b) Folosind relațiile (1.9), respectiv (1.8), rezultă:

$$H(Y/X) = -[3 \cdot 0{,}316 \log_2 0{,}95 + 6 \cdot 0{,}0083 \log_2 0{,}025] =$$
$$= 0{,}336 \text{ bit/simbol;}$$

$$H(X/Y) = H(Y/X) = 0{,}336 \text{ bit/simbol.}$$

c) În conformitate cu relația (1.7) rezultă

$$H(X/Y) = -[3 \cdot 0{,}316 \log_2 0{,}316 + 6 \cdot 0{,}0083 \log_2 0{,}0083] =$$
$$= 1{,}92 \text{ bit/simbol.}$$

d) Transinformația se poate calcula cu relația (1.13):

$$I(X, Y) = 1{,}58 - 0{,}336 = 1{,}244 \text{ bit/simbol.}$$

e) Folosim relația (1.17), în care vom ține cont de faptul că eroarea medie este o constantă (punctul „*b*"). Cu această precizare vom putea scrie:

$$C = \max_{p(x_i)} H(Y) - 0{,}336 = \log_2 3 - 0{,}336 = 1{,}244 \text{ bit/simbol.}$$

1.7. *Un canal de transmisiune se caracterizează prin următoarea matrice de zgomot*:

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

La intrarea în canal se aplică simbolurile x_1, x_2 *și* x_3 *cu probabilitățile:*

$$p(x_1) = 0{,}7; \quad p(x_2) = 0{,}2; \quad p(x_3) = 0{,}1.$$

Se cere:

a) *cantitatea medie de informație furnizată de un simbol recepționat;*
b) *cantitatea de informație care se pierde la transmiterea unui mesaj format din 400 de simboluri;*
c) *cantitatea de informație recepționată în condițiile de la punctul b).*

Soluție

a) Se calculează entropia sursei conform relației (1.1):

$$H(X) = [0{,}7 \log_2 0{,}7 + 0{,}2 \log_2 0{,}2 + 0{,}1 \log_2 0{,}1] = \\ = 1{,}156 \text{ bit/simbol.}$$

b) Eroarea medie corespunzătoare recepționării unui simbol se calculează conform relației (1.9):

$$H(Y/X) = -0{,}7(0{,}98 \log_2 0{,}98 + 2 \cdot 0{,}01 \log_2 0{,}01) + 0{,}2(0{,}1 \log_2 0{,}1 + \\ + 0{,}75 \log_2 0{,}75 + 0{,}15 \log_2 0{,}15) + 0{,}1(0{,}2 \log_2 0{,}2 + 0{,}3 \log_2 0{,}3 + \\ + 0{,}5 \log_2 0{,}5) = 0{,}473 \text{ bit/simbol.}$$

Eroarea care apare la recepționarea unui mesaj format din $n = 400$ de simboluri va fi:

$$\Delta I = nH(Y/X) = 400 \cdot 0{,}473 = 189{,}5 \text{ bit.}$$

c) Informația totală recepționată va fi:

$$I = nI(X, Y) = n[H(Y) - H(Y/X)] = nH(Y) - \Delta I.$$

Trebuie să determinăm $H(Y)$; pentru aceasta este necesară calcularea probabilităților $p(y_j)$. Deoarece

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i) p(y_j/x_i),$$

se obține:

$$p(y_1) = 0{,}7 \cdot 0{,}98 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}726;$$

$$p(y_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}75 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}187;$$

$$p(y_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}15 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}087.$$

Entropia cîmpului de ieșire se calculează cu o relație de forma (1.1):

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j) \log_2 p(y_j) = -(0{,}726 \log_2 0{,}726 +$$

$$+ 0{,}187 \log_2 0{,}187 + 0{,}087 \log_2 0{,}087) = 1{,}09 \text{ bit/simbol.}$$

Informația totală recepționată va avea valoarea:

$$I = 400 \cdot 1{,}09 - 189{,}5 = 248{,}1 \text{ bit/simbol.}$$

1.8. *Fie matricea probabilităților cîmpului produs intrare-ieșire de forma:*

$$\mathbf{P}(X, Y) = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se calculeze entropiile condiționate H(Y/X) *și* H(X/Y).

Soluție

Ținînd seama că:

$$\sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_j) = p(y_j) \quad \text{și} \quad \sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_j) = p(x_i),$$

rezultă:

$$p(x_1) = 0{,}3;\ p(x_2) = 0{,}6;\ p(x_3) = 0{,}1;$$

$$p(y_1) = 0{,}5;\ p(y_2) = 0{,}4;\ p(y_3) = 0{,}1.$$

Deoarece

$$p(y_j/x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}, \qquad p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)},$$

rezultă că matricea $\mathbf{P}(Y/X)$ se obține din matricea $\mathbf{P}(X, Y)$ împărțind elementele fiecărei linii i prin $p(x_i)$. Se obține:

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}33 & 0{,}5 & 0{,}167 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eroarea medie se calculează conform relației (1.9):

$$H(Y/X) = -[0{,}3 \log_2 1 + 0{,}2 \log_2 0{,}33 + 0{,}3 \log_2 0{,}5 +$$

$$+ 0{,}1 \log_2 0{,}167 + 0{,}1 \log_2 1] = 0{,}876 \text{ bit/simbol.}$$

Similar, elementele matricei $\mathbf{P}(X/Y)$ se vor obține prin împărțirea elementelor fiecărei coloane j a matricei $\mathbf{P}(X, Y)$ prin $p(y_j)$. Se obține:

$$\mathbf{P}(X/Y) = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}75 & 1 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{bmatrix}$$

Echivocația se va calcula cu relația (1.8):

$$H(X/Y) = -[0{,}3 \log_2 0{,}6 + 0{,}2 \log_2 0{,}4 + 0{,}3 \log_2 0{,}75 + \\ + 0{,}1 \log_2 1 + 0{,}1 \log_2 0{,}25] = 0{,}809 \text{ bit/simbol.}$$

1.9. *La intrarea unui canal binar simetric caracterizat prin matricea de tranziție de forma*

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

se aplică simbolurile x_1 *și* x_2 *cu probabilitățile* $p(x_1) = 3/4$ *și* $p(x_2) = 1/4$. *Se cere să se calculeze:*

a) *entropia cîmpului de la intrare;*
b) *entropia cîmpului de la ieșire;*
c) *entropia cîmpurilor reunite;*
d) *eroarea medie și echivocația;*
e) *transinformația;*
f) *capacitatea canalului;*
g) *setul optim de probabilități de intrare care maximalizează transinformația;*
h) *redundanța și eficiența canalului.*

Soluție

a) Cu relația (1.1) calculăm

$$H(X) = -3/4 \log_2 3/4 - 1/4 \log_2 1/4 = 2 - 3/4 \log_2 3 = 0{,}81 \text{ bit/simbol.}$$

b)
$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{2} p(y_j) \log_2 p(y_j).$$

Pentru a calcula probabilitățile simbolurilor de la ieșire, se înmulțește setul de probabilități de la intrare cu matricea de tranziție:

$$\mathbf{P}(Y) = \mathbf{P}(X)\,\mathbf{P}(Y/X) = [3/4 \;\; 1/4] \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = [7/12 \;\; 5/12].$$

Deci:

$$H(Y) = -7/12 \log_2 7/12 - 5/12 \log_2 5/12 = 0{,}98 \text{ bit/simbol.}$$

c) Entropia cîmpurilor reunite se calculează cu relația (1.7). Mai înainte însă trebuie să calculăm matricea probabilităților cîmpurilor reunite. Pentru aceasta se înmulțește matricea probabilităților cîmpului de intrare, scrisă de data aceasta ca o matrice diagonală, cu matricea de tranziție:

$$\mathbf{P}(X, Y) = \mathbf{P}(X)\,\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/12 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare:

$$H(X, Y) = -1/2 \log_2 1/2 - 1/4 \log_2 1/4 - 1/12 \log_2 1/12 - \\ - 1/6 \log_2 1/6 = 1{,}73 \text{ bit/simbol.}$$

d) Eroarea medie și echivocația pot fi calculate direct din relațiile lor de definiție sau pe baza relațiilor dintre entropii, ținînd cont de rezultatele de la punctele „*a*", „*b*" și „*c*".

Pe baza relației (1.9) se deduce eroarea medie:

$$H(Y/X) = -1/2 \log_2 2/3 - 1/4 \log_2 1/3 - 1/12 \log_2 1/3 - \\ - 1/6 \log_2 2/3 = 0{,}92 \text{ bit/simbol.}$$

Același rezultat se obține folosind relația (1.11).

Pentru a calcula echivocația, trebuie determinată matricea $\mathbf{P}(X/Y)$. Ținînd cont că:

$$p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)},$$

rezultă că matricea $\mathbf{P}(X/Y)$ se obține din matricea $\mathbf{P}(X, Y)$ prin împărțirea coloanelor acesteia la valorile probabilităților $p(y_j)$ corespunzătoare. În cazul particular al problemei, se vor împărți elementele primei coloane prin $p(y_1)$, iar elementele celei de-a doua coloane — prin $p(y_2)$:

$$\mathbf{P}(X/Y) = \begin{bmatrix} \frac{1/2}{7/12} & \frac{1/4}{5/12} \\ \frac{1/12}{7/12} & \frac{1/6}{5/12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/7 & 3/5 \\ 1/7 & 2/5 \end{bmatrix}.$$

Pe baza relației (1.8) se deduce

$$H(X/Y) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{6}{7} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{3}{5} - \frac{1}{12} \log_2 \frac{1}{7} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{2}{5} = \\ = 0{,}75 \text{ bit/simbol.}$$

La același rezultat se ajunge folosind relația (1.12).

e) Transinformația se va putea calcula în mai multe feluri, ținînd seama de relațiile (1.10) sau (1.13) dintre entropii și se obține

$$I(X, Y) = 0{,}06 \text{ bit/simbol.}$$

f) Capacitatea canalului binar simetric se calculează cu formula (1.21):

$$C = 1 + 2/3 \log_2 2/3 + 1/3 \log_2 1/3 = 0{,}082 \text{ bit/simbol.}$$

g) Pentru a calcula setul optim de probabilități $p_0(x_1)$, $p_0(x_2)$ care maximalizează transinformația, vom utiliza relațiile:

$$p(y_1) = p_0(x_1) \cdot 2/3 + p_0(x_2) \cdot 1/3;$$

$$p(y_2) = p_0(x_1) \cdot 1/3 + p_0(x_2) \cdot 2/3;$$

$$C = \max_{p(x_i)} [H(Y) - H(Y/X)].$$

În cazul canalului binar simetric

$$H(Y/X) = -\,p(x_1, y_1)\log_2 p(y_1/x_1) - p(x_1, y_2)\log_2 p(y_2/x_1) -$$
$$- p(x_2, y_1)\log_2 p(y_1/x_2) - p(x_2, y_2)\log_2 p(y_2/x_2) =$$
$$= -\,p(x_1)\,[p(y_1/x_1)\log_2 p(y_1/x_1) + p(y_2/x_1)\log_2 p(y_2/x_1)] -$$
$$- p(x_2)\,[p(y_1/x_2)\log_2 p(y_1/x_2) + p(y_2/x_2)\log_2 p(y_2/x_2)] =$$
$$= -\,p(x_1)\,[2/3\log_2 2/3 + 1/3\log_2 1/3] - p(x_2)\,[1/3\log_2 1/3 +$$
$$+ 2/3\log_2 2/3] =$$
$$= -[2/3\log_2 2/3 + 1/3\log_2 1/3]\,[p(x_1) + p(x_2)] =$$
$$= -\,2/3\log_2 2/3 - 1/3\log_2 1/3.$$

Deci $H(Y/X)$ nu depinde de probabilitățile simbolurilor de la intrare. Rezultă:

$$C = \max_{p(x_i)} H(Y) + 2/3\log_2 2/3 + 1/3\log_2 1/3.$$

Dar $\max_{p(x_i)} H(Y) = 1$ bit și se obține cînd $p(y_1) = p(y_2)$. Din această condiție și ținînd cont că $p_0(x_1) + p_0(x_2) = 1$, se obține un sistem de două ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases} p_0(x_1)\,2/3 + p_0(x_2)\,1/3 = p_0(x_1)\,1/3 + p_0(x_2)\,2/3 \\ p_0(x_1) + p_0(x_2) = 1 \end{cases}$$

din care rezultă:

$$p_0(x_1) = p_0(x_2) = 1/2.$$

h) Redundanța canalului este, conform relației (1.31):

$$R(C) = C - I(X, Y) = 0{,}082 - 0{,}06 = 0{,}022 \text{ bit/simbol.}$$

Pentru calculul eficienței canalului se folosește relația (1.32):

$$\eta(C) = \frac{I(X, Y)}{C} = 0{,}73.$$

1.10. *Matricea probabilităților reunite intrare-ieșire asociată unui canal de transmisiune este de forma:*

$$\mathbf{P}(X, Y) = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se calculeze:

a) *entropia cîmpului de la intrare;*
b) *entropia cîmpului de la ieșire;*
c) *entropia cîmpurilor reunite;*
d) *eroarea medie și echivocația;*
e) *transinformația și capacitatea canalului.*

Soluție

a) Pentru calculul entropiei $H(X)$ sînt necesare probabilitățile $p(x_i)$. Acestea se calculează din matricea probabilităților cîmpurilor reunite ținînd seama că:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{2} p(x_i, y_j).$$

Prin urmare, $p(x_i)$ se obține prin însumarea elementelor liniei i a matricei $\mathbf{P}(X, Y)$. Rezultă:

$$p(x_1) = p(x_2) = 1/2.$$

Aplicînd relația (1.1) se obține entropia:

$$H(X) = -\,1/2 \log_2 1/2 - 1/2 \log_2 1/2 = 1 \text{ bit/simbol.}$$

b) Deoarece

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_j),$$

rezultă că $p(y_j)$ se obține prin însumarea elementelor coloanei j a matricei $\mathbf{P}(X, Y)$. Rezultă:

$$p(y_1) = p(y_2) = 1/2;$$

$$H(Y) = -\,1/2 \log_2 1/2 - 1/2 \log_2 1/2 = 1 \text{ bit/simbol.}$$

c) $$H(X, Y) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i, y_j) = -\,4 \cdot 1/4 \log_2 1/4 =$$

$$= 2 \text{ bit/simbol.}$$

d) Entropiile condiționate se vor putea calcula pe baza rezultatelor anterioare, aplicînd relațiile (1.11) și (1.12):

$$H(Y/X) = 1 \text{ bit/simbol;}$$

$$H(X/Y) = 1 \text{ bit/simbol.}$$

e) Introducînd valorile calculate ale entropiilor $H(X)$, $H(Y)$ și $H(X, Y)$ în relația (1.13), se obține $I(X, Y) = 0$, astfel încît capacitatea rezultă din (1.17) ca fiind $C = 0$.

○ **Concluzie.** Acest canal are perturbații foarte mari și ca urmare nu transmite informație.

1.11. *Două canale binare cu grafurile de tranziție din figura 1.11, a se leagă în cascadă. Se cere:*

a) *graful de tranziție al canalului echivalent obținut prin conectarea în cascadă a celor două canale;*

b) *valoarea lui* q (*v. matricea* (*1.18*)) *pentru care canalul echivalent este binar simetric;*

c) *capacitatea canalului echivalent.*

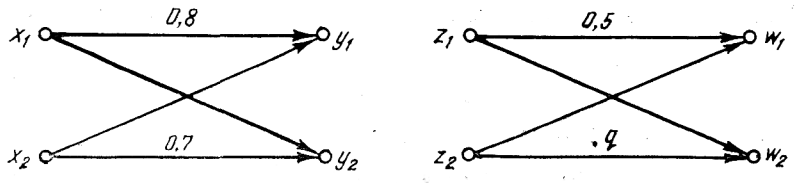


Fig. 1.11,*a*. Grafurile de tranziție ale celor două canale.

Soluție

a) În primul rînd se completează probabilitățile care nu au fost precizate în grafurile de tranziție din figura 1.11,*a*. Completarea se poate face ținînd cont că $\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) = 1$.

În acest caz:

$$p(y_1/x_1) + p(y_2/x_1) = 1,$$

de unde rezultă:

$$p(y_2/x_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

După un raționament similar se deduc:

$$p(y_1/x_2) = 1 - p(y_2/x_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$$

$$p(w_2/z_1) = 1 - p(w_1/z_1) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5;$$

$$p(w_1/z_2) = 1 - p(w_2/z_2) = 1 - q.$$

Conectarea în cascadă a celor două canale este prezentată în figura 1.11,*b*.

Matricea de tranziție a canalului echivalent se obține prin înmulțirea matricelor de tranziție ale celor două canale.

Deoarece

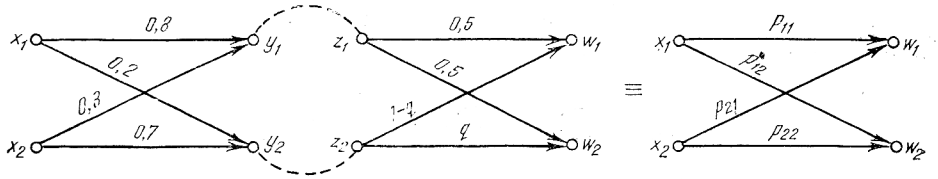


Fig. 1.11,*b*. Conectarea în cascadă a celor două canale.

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1-q & q \end{bmatrix},$$

rezultă:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1-q & q \end{bmatrix}$$

sau încă:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0{,}6 - 0{,}2q & 0{,}4 + 0{,}2q \\ 0{,}85 - 0{,}7q & 0{,}15 + 0{,}7q \end{bmatrix}.$$

b) Condiția de canal binar simetric este, în conformitate cu matricea (1.20),

$$p_{11} = p_{22},$$

ceea ce conduce la condiția:

$$0{,}6 - 0{,}2q = 0{,}15 + 0{,}7\ q,$$

de unde se obține:

$$q = \frac{0{,}45}{0{,}9} = 0{,}5.$$

Prin urmare, matricea de tranziție a canalului echivalent va fi:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

c) Capacitatea unui canal binar simetric este dată de formula (1.21), astfel încît pentru $p = 0{,}5$ se obține:

$$C = 1 - 0{,}5 \log_2 0{,}5 + 0{,}5 \log_2 0{,}5 = 0.$$

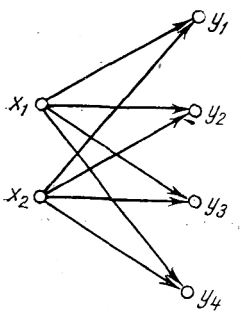


Fig. 1.12. Graful de tranziție al canalului.

1.12. *Un canal de transmisiune, al cărui graf de tranziție este prezentat în figura 1.12, se caracterizează prin următoarea matrice de zgomot*:

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se calculeze capacitatea acestui canal.

Soluție

Se folosește relația (1.17).

Canalul din problemă are o structură de zgomot simetrică, așa încît calculul va fi relativ simplu. Se calculează pentru început eroarea medie dată de relația (1.9). Rezultă:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i) \sum_{j=1}^{4} p(y_j/x_i) \log_2 p(y_j/x_i) =$$

$$= -p(x_1)\,[1/2 \log_2 1/2 + 1/4 \log_2 1/4 + 2 \cdot 1/8 \log_2 1/8] -$$

$$-p(x_2)\,[1/2 \log_2 1/2 + 1/4 \log_2 1/4 + 2 \cdot 1/8 \log_2 1/8] =$$

$$= -[1/2 \log_2 1/2 + 1/4 \log_2 1/4 + 2 \cdot 1/8 \log_2 1/8]\,[p(x_1) + p(x_2)] =$$

$$= -[1/2 \log_2 1/2 + 1/4 \log_2 1/4 + 2 \cdot 1/8 \log_2 1/8] = 1{,}75 \text{ bit/simbol.}$$

Se constată că $H(Y/X)$ este o constantă, ceea ce înseamnă că pentru a calcula capacitatea este suficient să se calculeze $max\ H(Y)$:

$$C = \max_{p(x_i)} H(Y) - 1{,}75.$$

Folosind relația (1.2) se obține:

$$C = \log_2 4 - 1{,}75 = 0{,}25 \text{ bit/simbol.}$$

1.13. *Să se determine capacitatea canalului binar cu anulări avînd graful de tranziție din figura 1.13,* a.

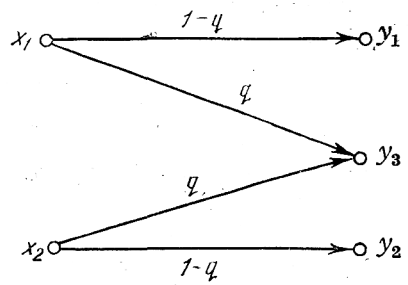


Fig. 1.13,*a*. Graful de tranziție al canalului binar cu anulări.

Soluție

Un canal binar cu anulări se caracterizează prin faptul că spațiul observațiilor de la recepție se împarte în trei regiuni, așa cum se ilustrează în figura 1.13, *b*.

Dacă semnalul recepționat depășește nivelul n_1, se ia decizia y_1, dacă este mai mic decît n_2 se ia decizia y_2, iar dacă este cuprins între cele două nivele se ia decizia y_3.

Capacitatea acestui canal se calculează cu formula (1.17). Vom calcula, pe rînd, entropiile $H(Y)$ și $H(Y/X)$:

$$H(Y) = -p(y_1)\log p(y_1) - p(y_2)\log p(y_2) - p(y_3)\log p(y_3).$$

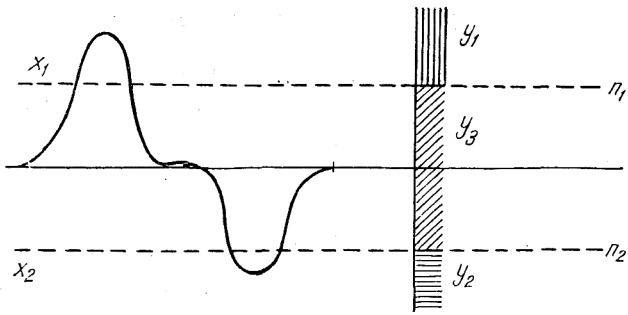


Fig. 1.13,*b*. Partiția spațiului observațiilor de la recepție.

Pentru calculul probabilității $p(y_1)$, folosim relațiile

$$p(x_1, y_1) = p(x_1)\,p(y_1/x_1) = p(y_1)\,p(x_1/y_1).$$

Deoarece $p(x_1/y_1) = 1$, rezultă:

$$p(y_1) = p(x_1)\,p(y_1/x_1) = p(x_1)\,(1-q).$$

Analog se poate calcula $p(y_2)$ și se obține

$$p(y_2) = p(x_2)\,p(y_2/x_2) = p(x_2)\,(1-q).$$

Semnalul y_3 poate apărea fie din semnalul x_1, fie din x_2, ceea ce se va putea scrie astfel:

$$y_3 = (y_3 \cap x_1) \cup (y_3 \cap x_2),$$

de unde rezultă:

$$p(y_3) = p(x_1)\,p(y_3/x_1) + p(x_2)p(y_3/x_2) =$$
$$= q[p(x_1) + p(x_2)] = q.$$

Introducînd valorile probabilităților $p(y_1)$, $p(y_2)$ și $p(y_3)$ în expresia lui $H(Y)$, rezultă:

$$H(Y) = -p(x_1)\cdot(1-q)\,[\log_2 p(x_1) + \log_2(1-q)\,] -$$
$$-p(x_2)\cdot(1-q)\,[\log_2 p(x_2) + \log_2(1-q)] - q\log_2 q =$$
$$= -p(x_1)\cdot(1-q)\log_2 p(x_1) - p(x_2)\cdot(1-q)\log_2 p(x_2) -$$
$$-(1-q)\log_2(1-q) - q\log_2 q = (1-q)\,H(X) -$$
$$-(1-q)\log_2(1-q) - q\log_2 q.$$

Calculăm în continuare eroarea medie, folosind relația (1.9) care se mai scrie sub forma

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p(x_i)\cdot p(y_j/x_i)\log_2 p(y_j/x_i).$$

Din matricea de tranziție prezentată în figura 1.13, *a* rezultă probabilitățile condiționate:

$$p(y_1/x_1) = 1-q;\ p(y_1/x_2) = 0;\ p(y_2/x_1) = 0;\ p(y_2/x_2) = 1-q;$$
$$p(y_3/x_1) = q;\ p(y_3/x_2) = q.$$

Expresia erorii medii devine

$$H(Y/X) = -p(x_1)\cdot(1-q)\log_2(1-q) - p(x_2)\cdot(1-q)\log_2(1-q) -$$
$$-p(x_1)\cdot q\log_2 q - p(x_2)\cdot q\log_2 q,$$

sau încă

$$H(Y/X) = -(1-q)\log_2(1-q) - q\log_2 q.$$

Se poate calcula acum capacitatea canalului cu ajutorul relației (1.17). Se obține:

$$C = \max_{p(x_i)}\,[(1-q)H(X) - (1-q)\log_2(1-q) - q\log_2 q +$$
$$+(1-q)\log_2(1-q) + q\log_2 q] = (1-q)\max_{p(x_i)} H(X).$$

Dar valoarea maximă a entropiei $H(X)$ se obține cînd:

$$p(x_1) = p(x_2) = 1/2$$

și este egală cu unitatea. Rezultă în final capacitatea canalului binar cu anulări ca fiind:

$$C = 1 - q.$$

1.14. *La intrarea unui canal caracterizat printr-o matrice de zgomot de forma:*

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}98 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}04 & 0{,}96 \end{bmatrix}$$

se aplică simbolurile x_1, x_2 *și* x_3 *cu probabilitățile* $p(x_1) = 0{,}5$, $p(x_2) = 0{,}3$ *și* $p(x_3) = 0{,}2$. *Se cere să se calculeze entropia cîmpului de la ieșire.*

Soluție

Probabilitatea recepționării unui simbol y_j se poate calcula cu formula:

$$p(y_j) = \sum_{j=1}^{3} p(x_i) \cdot p(y_j/x_i)$$

și rezultă:

$$p(y_1) = p(x_1) \cdot p(y_1/x_1) + p(x_2) \cdot p(y_1/x_2) + p(x_3) \cdot p(y_1/x_3) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}97 + 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0 = 0{,}488;$$
$$p(y_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}03 + 0{,}3 \cdot 0{,}98 + 0{,}2 \cdot 0{,}04 = 0{,}317;$$
$$p(y_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}96 = 0{,}195;$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j) \log_2 p(y_j) = -0{,}488 \log_2 0{,}488 - 0{,}317 \log_2 0{,}317 -$$
$$- 0{,}195 \log_2 0{,}195 = 1{,}49 \text{ bit/simbol.}$$

1.15. *Matricea de tranziție a unui canal binar este*:

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

Se cere:

a) *să se calculeze capacitatea canalului;*
b) *să se determine setul optim de probabilități ale simbolurilor de la intrare.*

Soluție

a) Se calculează entropiile:

$$H(Y/x_1) = -p(y_1/x_1) \log_2 p(y_1/x_1) - p(y_2/x_1) \log_2 p(y_2/x_1) =$$
$$= -0{,}9 \log_2 0{,}9 - 0{,}1 \log_2 0{,}1 = 0{,}46 \text{ bit/simbol};$$
$$H(Y/x_2) = -p(y_1/x_2) \log_2 p(y_1/x_2) - p(y_2/x_2) \log_2 p(y_2/x_2) =$$
$$= -0{,}2 \log_2 0{,}2 - 0{,}8 \log_2 0{,}8 = 0{,}72 \text{ bit/simbol.}$$

Se calculează mărimile ajutătoare folosind (1.24), (1.25), (1.26) și (1.27) și rezultă:

$$\Delta = 0{,}9 \cdot 0{,}8 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}7;$$
$$q_{11} = \frac{0{,}8}{0{,}7} = 1{,}14; \quad q_{21} = -\frac{0{,}2}{0{,}7} = -0{,}28;$$
$$q_{12} = -\frac{0{,}1}{0{,}7} = -0{,}14; \quad q_{22} = \frac{0{,}9}{0{,}7} = 1{,}28;$$
$$Q_1 = -1{,}14 \cdot 0{,}46 + 0{,}14 \cdot 0{,}72 = -0{,}42;$$
$$Q_2 = +0{,}28 \cdot 0{,}46 - 1{,}28 \cdot 0{,}72 = -0{,}79.$$

Capacitatea canalului va fi (v. rel. (1.23)):

$$C = \log_2[2^{-0{,}42} + 2^{-0{,}79}] =$$
$$= \log_2 (0{,}77 + 0{,}58) = \log_2 1{,}35 = 0{,}43 \text{ bit/simbol.}$$

b) Setul optim de probabilități se calculează cu ajutorul formulelor (1.28) și (1.29):

$$p(x_1) = 2^{-0,43}[1,14 \cdot 0,77 - 0,14 \cdot 0,58] = 0,53;$$

$$p(x_2) = 2^{-0,43}[-0,28 \cdot 0,77 + 1,28 \cdot 0,58] = 0,47.$$

1.16. *La transmiterea pe teleimprimator, o imagine de formă pătrată se descompune în 1 500 de linii și 1 500 de coloane. Pentru o redare cît mai corectă a imaginilor, sistemul poate reproduce 12 nivele de gri.*

Se cere:

a) *numărul elementelor în care se descompune imaginea;*
b) *cantitatea de informație furnizată de un singur element de imagine;*
c) *cît timp ar necesita transmiterea unei imagini pe o linie telefonică avînd lărgimea de bandă de 3,1 kHz, la un raport semnal-zgomot de 26 dB.*

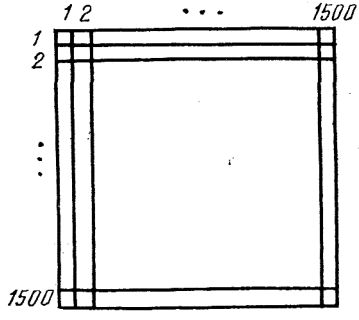


Fig. 1.16. O posibilitate de descompunere a imaginilor.

Soluție

a) Descompunerea imaginii se face deci în 1 500 de linii și 1 500 de coloane. Numărul elementelor de imagine va fi:

$$n = 1\,500 \cdot 1\,500 = 2,25 \cdot 10^6.$$

b) Un element de imagine poate avea cu aceeași probabilitate oricare dintre cele 12 nivele de gri. Rezultă că un singur element de imagine va furniza cantitatea de informație:

$$I_{elem.imag} = -\log_2 \frac{1}{12} = \log_2 12 = 3,59 \text{ bit.}$$

Cantitatea de informație pe care o conține o imagine va fi:

$$I_{imag} = n \cdot I_{elem.imag} = 2,25 \cdot 10^6 \cdot 3,59 = 8,07 \cdot 10^6 \text{ bit.}$$

c) Dacă se consideră că se utilizează canalul telefonic foarte aproape de capacitatea lui, C, înseamnă că debitul informațional al canalului va fi $C_t = C$ bit/s. Capacitatea canalului se calculează cu formula (1.30), unde:

$$P/N = 26 \text{ dB} = 10^{2,6} = 400.$$

Prin urmare rezultă:

$$C_t = 3,1 \cdot 10^3 (1 + 400) = 2,67 \cdot 10^4 \text{ bit/s.}$$

Timpul necesar transmiterii imaginii în cazul utilizării canalului telefonic la capacitatea sa va fi:

$$t_{imag} = \frac{I_{imag}}{C_t} = \frac{8,07 \cdot 10^6}{2,67 \cdot 10^4} = 320 \text{ s.}$$

În legătură cu această problemă putem face următoarele observații:

○ **Observația 1.** Putem ajunge la același rezultat prin următorul raționament simplu. Se eșantionează semnalul de imagine la intervale $\tau_{eș} = 1/2\, w_R$. Pentru cuantizare se alege

mărimea cuantei egală cu dispersia zgomotului σ_N. Astfel, dacă se consideră că semnalul este cules pe o rezistență unitară, avem

$$\Delta q = S_{min} = \sqrt{N} = \sigma_N,$$

unde N reprezintă puterea zgomotului, iar S_{min} —nivelul minim al semnalului. Se motivează această alegere prin faptul că probabilitatea de apariție a unui zgomot de amplitudine $3\sigma_N$ este practic zero, iar probabilitatea de apariție a unui zgomot de amplitudine $2\sigma_N$ este foarte mică. În consecință, un semnal de amplitudine σ_N provine cu mare probabilitate din zgomot, iar un semnal de amplitudine $2\sigma_N$ provine dintr-un semnal util peste care s-a suprapus zgomot de aceeași putere.

Nivelul maxim al semnalului va fi

$$S_{max} = \sqrt{P + N},$$

unde P reprezintă puterea semnalului. Rezultă numărul m al nivelelor de cuantizare:

$$m = \frac{S_{max}}{S_{min}} = \frac{\sqrt{P + N}}{\sqrt{N}}.$$

Un eșantion va conține o cantitate de informație:

$$I_{eș} = -\log 1/m = \log \sqrt{1 + P/N},$$

care va determina un debit informațional egal cu C_t, deoarece:

$$\frac{I_{eș}}{\tau_{eș}} = \frac{1/2 \log (1 + P/N)}{1/2\, w_R} = w_R \cdot \log (1 + P/N) = C_t.$$

○ **Observația 2.** Deoarece canalul telefonic are o bandă de 3,1 kHz, eșantioanele pe care le transmite trebuie să se succeadă cu o frecvență de cel puțin $2 \times 3{,}1 = 6{,}2$ kHz, ceea ce reprezintă frecvența f_i cu care pot fi transmise elementele de imagine. Astfel, durata necesară transmiterii întregii imagini va fi

$$t'_{imag} = \frac{n}{f_i} = \frac{2{,}25 \cdot 10^6}{6{,}2 \cdot 10^3} = 363 \text{ s}.$$

Așadar, rezultă $t'_{imag} > t_{imag}$, ceea ce semnifică faptul că în cazul transmiterii tipului de imagine presupus cu rata de 6,2 kHz nu se utilizează canalul la capacitatea sa. Într-adevăr, reluînd calculele în sens invers, pentru o durată de 363 s rezultă cantitatea de informație furnizată de un element de imagine egală cu 4,28 bit, ceea ce corespunde unui număr de aproximativ 20 de nivele de gri.

○ **Trebuie reținut** însă, că în instalații practice nu se poate atinge capacitatea canalului, transinformația tinzînd doar către valoarea capacității canalului.

1.17. *Fie o sursă de informații care generează semnale continue în timp. Se cere:*

a) *să se calculeze cantitatea de informație furnizată de sursă dacă semnalul generat ocupă banda de frecvențe 0 Hz — 6 MHz și are amplitudinea cuantizată în 128 nivele egal probabile;*

b) *să se calculeze banda de frecvență necesară transmiterii cantității de informație conținute în semnalul de la punctul „a", dacă se transmite, în urma unei transformări adecvate, o succesiune de eșantioane care vor putea lua cu aceeași probabilitate unul dintre patru nivele de cuantizare posibile;*

c) *să se calculeze de cîte nivele de cuantizare ar fi nevoie pentru a transmite cantitatea de informație conținută în semnalul de la punctul „a" pe un canal de transmisiune avînd banda de 3 MHz;*

d) *să se calculeze de cîte ori crește durata transmisiei față de cazul de la punctul „a", dacă folosim un canal de transmisiune avînd banda de 6 MHz, dar cu un raport semnal/zgomot de 20 dB.*

Soluție

a) Numărul maxim de nivele de cuantizare depinde de raportul semnal-zgomot și este dat de relația:

$$m = \sqrt{\frac{P+N}{N}}.$$

Relația (1.30) care dă capacitatea unui canal continuu se poate scrie și în funcție de numărul nivelelor de cuantizare astfel:

$$C = 2\,w \log_2 \sqrt{\frac{P+N}{N}} = 2\,w \log_2 m.$$

Din datele problemei avem: $w = 6$ MHz, $m = 128$, astfel încît:

$$C = 2 \cdot 6 \cdot 10^6 \cdot \log_2 128 = 84 \text{ Mbit/s}.$$

b) Avînd în vedere faptul că trebuie transmisă aceeași cantitate de informație, datorită reducerii numărului nivelelor de cuantizare de la 128 la 4, va trebui să crească în mod obligatoriu banda de frecvență necesară transmiterii, așa cum se poate observa din cele de mai jos

$$C = 2\,w_1 \log_2 m_1 = 2w_2 \log_2 m_2;$$

$$w_2 = w_1 \frac{\log_2 m_1}{\log_2 m_2}.$$

Pentru $m_1 = 128$, $m_2 = 4$ și $w_1 = 6$ MHz, rezultă:

$$w_2 = 6 \cdot 10^6 \frac{\log_2 128}{\log_2 4} = 6 \cdot 10^6 \cdot \frac{7}{2} = 21 \text{ MHz}.$$

○ **Se observă că** printr-o mărire de numai de 3,5 ori a benzii de frecvență s-a putut reduce numărul nivelelor de cuantizare de 32 de ori.

c) Dacă notăm prin m_3 numărul nivelelor de cuantizare necesare și prin w_3 banda de frecvență a canalului, capacitatea canalului se scrie sub forma:

$$C = 2\,w_3 \log_2 m_3,$$

de unde rezultă

$$m_3 = 2^{C/2w_3}.$$

Pentru $C = 84$ Mbit/s și $w_3 = 3$ MHz, rezultă:

$$m_3 = 2^{84/6} = 2^{14} = 16\,192 \text{ nivele}.$$

○ **Concluzie.** Rezultatul obținut scoate în evidență faptul că transmiterea unei anumite cantități de informație este posibilă și pe un canal de transmisiune avînd o bandă mai redusă decît cea a semnalului inițial, prin mărirea apreciabilă a numărului nivelelor de cuantizare.

d) Prin reducerea raportului semnal-zgomot capacitatea canalului scade, deci pentru a transmite o anumită cantitate de informație durata transmisiei va crește. Notăm cu indicele „4" mărimile caracteristice canalului în acest caz. Capacitatea canalului va fi:

$$C_4 = w_4 \log_2\left(1 + \frac{P_4}{N_4}\right) = 6 \cdot 10^6 \log_2(1 + 0{,}01) = 8{,}64 \cdot 10^4 \text{ bit/s.}$$

Dacă notăm prin C_1 capacitatea canalului de la punctul „a", rezultă raportul:

$$\frac{C_1}{C_4} = \frac{84 \cdot 10^6}{8{,}64 \cdot 10^4} = 980.$$

Astfel, pe canalul mai zgomotos transmiterea informației se face de cca. 980 ori mai lent decît pe canalul inițial și, deci, în mod corespunzător, și timpul necesar transmiterii va crește de același număr de ori.

1.18. *Să se calculeze capacitatea canalului necesar pentru a transmite:*

a) *semnal vocal;*

b) *o piesă muzicală;*

c) *imagine statică;*

d) *imagine* TV *alb-negru.*

Soluție

a) Semnalul sonor reprezintă o modificare în timp a presiunii aerului, care creează în ureche senzația de sunet. În cazul în care avem în vedere realizarea unui sistem de transmitere a semnalelor sonore, trebuie să luăm în considerație în primul rînd caracteristicile fiziologice ale sistemului auditiv uman. În urma unor experiențe s-a constatat că urechea poate percepe sunete al căror spectru se întinde de la 30 ... 50 Hz pînă la 15 kHz. O altă caracteristică este raportul dintre intensitatea maximă a sunetului care încă nu provoacă dureri organului auditiv și intensitatea sunetului abia perceptibil. Tot pe cale experimentală s-a găsit că, de exemplu, pe frecvența de 1 000 Hz intensitatea maximă este de 10^4 W/cm^2, iar cea minimă — de 10^{-16} W/cm^2, ceea ce înseamnă un raport 10^{12} (sau 120 dB). Acest raport va reprezenta dinamica semnalului sau raportul semnal-zgomot. Datele prezentate anterior reprezintă valori limită peste care nu are sens să se treacă și de multe ori nu este necesar nici să fie atinse.

Pentru a realiza o transmisie vocală inteligibilă, este necesară o bandă de frecvență cuprinsă între 300 Hz și 3 000 Hz și o dinamică de 20 dB.

Cu aceste precizări rezultă capacitatea canalului C_v, pentru transmiterea semnalului vocal:

$$C_v = W \log_2 (1 + P/N) = 2{,}7 \cdot 10^3 \log_2 (1 + 100) = 18 \cdot 10^3 \text{ bit/s.}$$

b) În cazul unei emisiuni muzicale, pentru o calitate foarte bună este necesară o bandă de frecvență cuprinsă între 40 Hz și 15 000 Hz și o dinamică de cca. 80 dB. Pentru a realiza această transmisie va fi necesar un canal avînd capacitatea C_m:

$$C_m = 14\,960 \cdot \log_2 (1 + 10^8) = 4 \cdot 10^5 \text{ bit/s.}$$

Este deci necesară o capacitate cu cca. două ordine de mărime superioară celei necesare transmiterii unui semnal vocal.

○ **Observație.** Datele obținute la punctele „*a*" și „*b*" sînt valori teoretice care arată cît trebuie să fie capacitatea minimă a canalului pe care dorim să facem transmisiunea. În practică, intervin o serie de factori cum ar fi costul sistemului, siguranța lui în funcționare etc., care fac ca aceste date să sufere modificări. De exemplu, în cazul unei transmisiuni muzicale nu este necesar să se reproducă toată dinamica unei orchestre într-o cameră de locuit, deci în acest caz se poate reduce substanțial capacitatea canalului de transmitere.

c) În cazul transmiterii unor imagini statice, în primul rînd, se pune problema transformării imaginii, care nu este o funcție de timp, într-o funcție de timp care să reprezinte în mod univoc imaginea dată. Se poate considera că o imagine statică alb-negru este formată dintr-o serie de zone avînd forme și intensități luminoase diferite. Un element de imagine suficient de mic va putea fi caracterizat printr-un număr care să reprezinte intensitatea luminoasă a acelui element de imagine. Dacă dimensiunile elementului de imagine sînt suficient de mici, atunci variațiile de intensitate din interiorul elementului de imagine pot fi neglijate, fără ca prin aceasta să aibe de suferit calitatea imaginii. Astfel, descompunînd o imagine într-un număr suficient de mare de elemente de imagine de dimensiuni suficient de mici, fiecărui element punîndu-i în corespondență o cifră care reprezintă intensitatea sa luminoasă și luînd aceste cifre într-o anumită succesiune, vom obține o funcție de timp, mesajul, care va putea fi transmis. În concluzie, la punctul de emisie va fi necesar un analizor de imagine (tubul videocaptor), iar la recepție, pentru refacerea imaginii din semnalul recepționat — un sintetizator de imagine (tubul cinescop).

Ne propunem în continuare să calculăm cantitatea de informație conținută într-o imagine și, pe baza acesteia, să determinăm capacitatea necesară a canalului de transmitere a imaginilor statice. În prealabil trebuie să precizăm numărul de elemente în care se descompune imaginea. Avînd în vedere că receptorul final este sistemul vizual uman, la descompunere va trebui să ținem cont de posibilitățile acestuia. Este cunoscut faptul că în cazul imaginilor alb-negru rezoluția sistemului vizual reprezintă un unghi de cca. 2 minute, detaliile cuprinse sub un unghi mai mic decît acesta neputînd fi observate. Pe cale experimentală s-a constatat că unghiul de deschidere optim pentru a privi o imagine este de cca. 20 grade și că formatul optim al imaginii este de 3 : 4 (fig. 1.18).

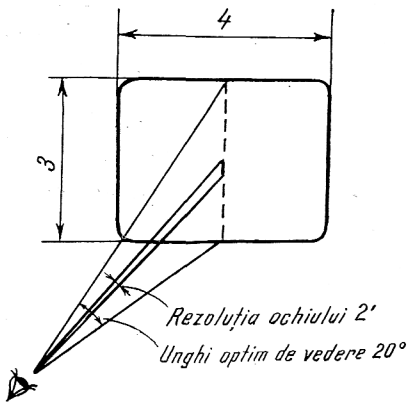


Fig. 1.18. Determinarea numărului de elemente pe verticală.

Cu aceste date vom putea calcula numărul elementelor de imagine. Pe direcția verticală vom avea

$$n_1 = \frac{20°}{2'} = \frac{20 \cdot 60'}{2'} = 600 \text{ elemente.}$$

Pe direcția orizontală rezultă:

$$n_2 = \frac{4}{3} n_1 = 800 \text{ elemente.}$$

Numărul total de elemente dintr-o imagine va fi:

$$n = n_1 n_2 = 600 \cdot 800 = 4{,}8 \cdot 10^5.$$

Următoarea problemă este să determinăm numărul de nuanțe de gri pe care le poate avea un element de imagine. S-a constatat experimental că dacă numărul nivelelor de gri se alege în jur de 100, imaginea reconstituită din aceste puncte pare suficient de naturală. Alegerea unui număr mai mare de nivele de gri nu aduce îmbunătățiri notabile în calitatea percepției, iar la un număr mai redus de nivele de gri se observă deja structura discretă (nenaturală) a imaginii.

Avînd în vedere cele de mai sus, se va putea calcula cantitatea de informație conținută într-o imagine. Cantitatea de informație conținută într-un element de imagine este

$$I_{elem} = -\log_2 \frac{1}{100} = 6{,}65 \text{ bit.}$$

Cantitatea de informație conținută în întreaga imagine rezultă:

$$I_{imag} = n\, I_{elem} = 4{,}8 \cdot 10^5 \cdot 6{,}65 = 3{,}19 \cdot 10^6 \text{ bit.}$$

Transmiterea la distanță a unei imagini o singură dată, este posibilă pe orice canal de transmisiune. Durata transmisiei depinde însă de capacitatea canalului utilizat.

De exemplu, dacă dorim să transmitem o imagine (fotografie) *pe o linie telefonică* avînd $w = 3$ kHz și un raport semnal-zgomot de 26 dB, va trebui să calculăm la început capacitatea acestui canal

$$C = w \log_2 \left(1 + \frac{P}{N}\right) = 3 \cdot 10^3 \cdot \log_2 (1 + 400) = 26 \text{ kbit.}$$

Debitul informațional al canalului este $C_t = 26$ kbit/s, astfel încît durata transmisiei unei imagini pe acest canal va fi:

$$T_{imag} = \frac{I_{imag}}{C_t} = \frac{3{,}19 \cdot 10^6}{26 \cdot 10^3} = 123 \text{ s.}$$

În concluzie, transmisia unei imagini statice pe un canal telefonic durează cca. două minute.

d) În cazul în care se pune problema transmiterii de imagini dinamice, vom avea în vedere inerția ochiului uman și în locul unei transmisii continue vom transmite o succesiune de $N = 25$ imagini pe secundă, suficient pentru a crea o senzație de imagine vie în sistemul vizual uman (principiul cinematografului și al televiziunii). Se pune problema calculului capacității canalului capabil să transmită o astfel de informație. Durata transmiterii unei imagini fiind impusă, 1/25 s, debitul de informație al sursei (sistem TV alb-negru) se va obține înmulțind cantitatea de informație conținută într-o imagine cu numărul N de imagini ce se transmit într-o secundă. Acest debit de informație este numeric egal cu capacitatea canalului necesară transmiterii imaginilor alb-negru, C:

$$C = I_{imag}\, N = 3{,}19 \cdot 10^6 \cdot 25 \cong 80 \text{ Mbit.}$$

Deci, pentru a realiza o transmisie TV alb-negru este necesar un canal cu o capacitate minimă de 80 Mbit sau un debit informațional de 80 Mbit/s.

Avînd în vedere faptul că:

$$C = 2\, w \log_2 \sqrt{\frac{P+N}{N}} = 2\, w \log_2 m,$$

unde m reprezintă numărul nivelelor de cuantizare (egal cu 100 — vezi raționamentul de la punctul „c"). vom putea calcula și banda de frecvență necesară transmiterii unei imagini TV alb-negru:

$$w = \frac{C}{2\log_2 m} = \frac{N I_{imag}}{2\log_2 m} = \frac{N n I_{elem}}{2\log_2 m} = \frac{N n \log_2 m}{2\log_2 m} = \frac{Nn}{2} =$$

$$= \frac{25 \cdot 4{,}8 \cdot 10^5}{2} = 6 \text{ MHz}.$$

Valoarea obținută reprezintă *limita teoretică* a benzii de frecvență necesare și ea presupune o transmitere continuă de informație. În realitate, acest lucru nu este posibil deoarece, din cînd în cînd, secvența informațională trebuie întreruptă pentu a face loc unor semnale de sincronizare fără de care nu este posibilă refacerea imaginii la recepție. Rezultă că în timpul disponibil va trebui să transmitem mai repede, ceea ce impune o bandă mai mare, sau să transmitem o cantitate de informație mai mică, înrăutățind calitatea imaginii.

1.19. *Fie un canal caracterizat prin următoarea matrice de zgomot:*

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

La intrarea canalului se aplică simbolurile x_1 *și* x_2 *cu probabilitățile*

$$p(x_1) = p(x_2) = 1/2.$$

Se cere:

a) *să se facă partiția simbolurilor recepționate conform criteriului plauzibilității maxime;*
b) *să se scrie matricea strategiei care caracterizează partiția;*
c) *să se scrie matricea de tranziție a canalului echivalent;*
d) *să se calculeze eroarea medie înainte și după partiție.*

Soluție

a) Folosim inegalitățile (1.36):

$$\frac{p(y_1/x_1)}{p(y_1/x_2)} = \frac{1/3}{1/6} = 2 > 1, \text{ deci } y_1 \in Y_1;$$

$$\frac{p(y_2/x_1)}{p(y_2/x_2)} = \frac{1/3}{1/6} = 2 > 1, \text{ deci } y_2 \in Y_1;$$

$$\frac{p(y_3/x_1)}{p(y_3/x_2)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2} < 1, \text{ deci } y_3 \in Y_2;$$

$$\frac{p(y_4/x_1)}{p(y_4/x_2)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2} < 1, \text{ deci } y_4 \in Y_2.$$

Partiția simbolurilor recepționate astfel dedusă este prezentată în figura 1.19,*a*.

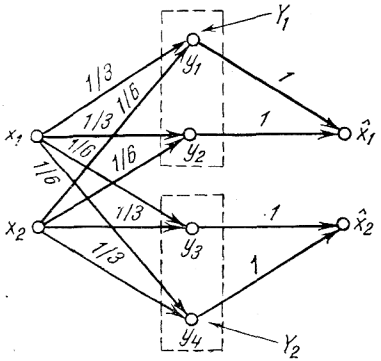


Fig. 1.19,*a*. Partiția simbolurilor recepționate conform criteriului plauzibilității maxime.

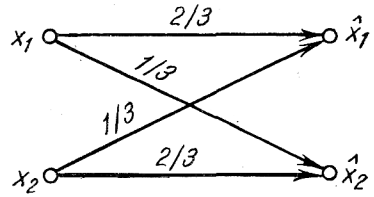


Fig. 1.19,*b*. Graful de tranziție al canalului echivalent.

b) Matricea (1.39) devine

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} p(\hat{x}_1/y_1) & p(\hat{x}_2/y_1) \\ p(\hat{x}_1/y_2) & p(\hat{x}_2/y_2) \\ p(\hat{x}_1/y_3) & p(\hat{x}_2/y_3) \\ p(\hat{x}_1/y_4) & p(\hat{x}_2/y_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Matricea de tranziție a canalului echivalent este

$$\mathbf{P}(\hat{X}/X) = \mathbf{P}(Y/X)\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Graful de tranziție corespunzător canalului echivalent este prezentat în figura 1.19,*b*.

d) Calculul erorilor medii înainte și după decizie, avînd în vedere structurile de zgomot, se face similar cu cel din problema 1.9. Deci:

$$H(Y/X) = -2 \cdot 1/3 \log_2 1/3 - 2 \cdot 1/6 \log_2 1/6 = 1{,}908 \text{ bit/simbol};$$

$$H(\hat{X}/X) = -2/3 \log_2 2/3 - 1/3 \log_2 1/3 = 0{,}918 \text{ bit/simbol}.$$

1,20. *Fie un canal de transmisiune caracterizat prin următoarea matrice de zgomot*:

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

La intrarea canalului se aplică simbolurile x_1 *și* x_2 *cu probabilitățile*:

$$p(x_1) = 2/3; \quad p(x_2) = 1/3.$$

Matricea costurilor este de forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se facă partiția simbolurilor și să se scrie matricea strategiei și matricea de tranziție a canalului echivalent dacă:

a) *se aplică criteriul riscului minim;*

b) *se aplică criteriul plauzibilității maxime;*

c) *se aplică criteriul observatorului ideal.*

Soluție

a) Se calculează pragul testului în conformitate cu relația (1.34):

$$K = \frac{p(x_2)}{p(x_1)} \cdot \frac{C_{21} - C_{22}}{C_{12} - C_{11}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{0{,}8 - 0}{0{,}4 - 0{,}2} = 2.$$

Notăm cu:

$$\frac{p(y_i/x_1)}{p(y_i/x_2)} = \lambda_i.$$

Conform relației (1.36), cu notațiile din (1.33) și (1.34) rezultă partiția:

$$\lambda_1 > 2, \text{ deci } y_1 \in Y_1;$$

$$\lambda_2 < 2, \text{ deci } y_2 \in Y_2;$$

$$\lambda_3 < 2, \text{ deci } y_3 \in Y_2;$$

$$\lambda_4 < 2, \text{ deci } y_4 \in Y_2.$$

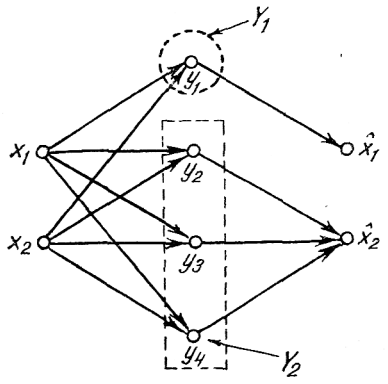


Fig. 1.20,*a*. Partiția simbolurilor recepționate conform criteriului riscului minim.

Partiția simbolurilor recepționate dedusă în acest fel este prezentată în figura 1.20,*a*.

Matricea strategiei de decizie definită de relația (1.24) va fi:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matricea de tranziție a canalului echivalent este:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}(Y/X)\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix}.$$

Graful de tranziție al canalului echivalent este prezentat în figura 1.20,*b*.

b) Se alege pragul testului $K = 1$. Rezultă următoarea partiție (v. și fig. 1.20,*c*):

$$\lambda_1 > 1, \; y_1 \in Y_1;$$

$$\lambda_2 > 1, \; y_2 \in Y_1;$$

$$\lambda_3 < 1, \; y_3 \in Y_2;$$

$$\lambda_4 < 1, \; y_4 \in Y_2.$$

Matricea strategiei de decizie și matricea de tranziție a canalului echivalent se obțin după cum urmează:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}(Y/X)\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

În figura 1.20,*d* se prezintă graful de tranziție corespunzător canalului echivalent.

c) În cazul criteriului observatorului ideal dat de relația (1.37) pragul testului se ia:

$$K = \frac{p(x_2)}{p(x_1)} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă următoarea partiție (v. și fig. 1.20,*e*):

$$\lambda_1 > 1/2, \qquad y_1 \in Y_1;$$

$$\lambda_2 > 1/2 \qquad y_2 \in Y_1;$$

$$\lambda_3 > 1/2 \qquad y_3 \in Y_1;$$

$$\lambda_4 < 1/2 \qquad y_4 \in Y_2.$$

Rezultă următoarele matrice **S** și **T**:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

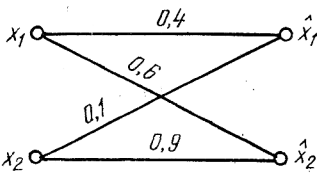


Fig. 1.20,*b*. Graful de tranziție al canalului echivalent.

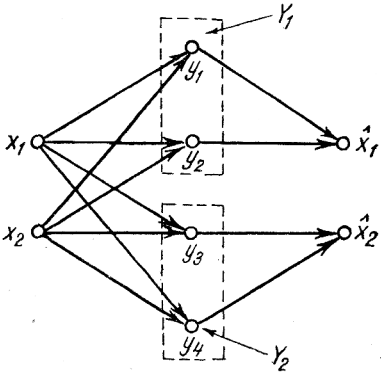


Fig. 1.20,*c*. Partiția simbolurilor recepționate conform criteriului plauzibilității maxime.

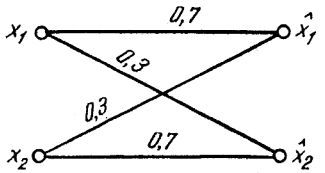


Fig. 1.20,*d*. Graful de tranziție al canalului echivalent.

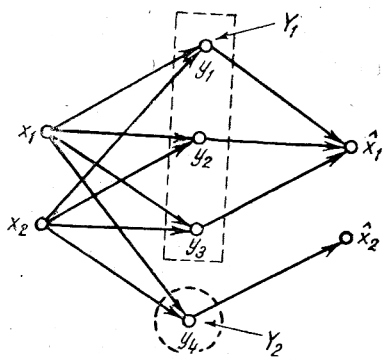


Fig. 1.20,*e*. Partiția simbolurilor recepționate conform criteriului observatorului ideal.

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}(Y/X)\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

1.21. *O sursă generează simbolurile* x_1 *și* x_2 *cu probabilitățile* $p(x_1) = 8/11$ *și* $p(x_2) = 3/11$. *Simbolurile sursei se aplică la intrarea unui canal cu perturbații, avînd următoarea matrice de zgomot:*

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se găsească strategia aleatoare pentru estimarea simbolurilor recepționate aplicînd criteriul minimax. Matricea costurilor este următoarea:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soluție

Pentru a soluționa problema vom recurge la o reprezentare vectorială a diverselor strategii de decizie în spațiul riscului condiționat. În cazul binar, acest spațiu se reduce la un plan avînd axele de coordonate $R(x_1; S)$ și $R(x_2; S)$. Vom nota cu $\mathbf{e}_1$ și $\mathbf{e}_2$ versorii celor două axe.

Vectorul de poziție corespunzător unei anumite strategii se va scrie sub forma:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{e}_1 r_{i1} + \mathbf{e}_2 r_{i2};$$
$$r_{i1} = C_{11}\, p(\hat{x}_1/x_1) + C_{12}\, p(\hat{x}_2/x_1);$$
$$r_{i2} = C_{21}\, p(\hat{x}_1/x_2) + C_{22}\, p(\hat{x}_2/x_2).$$

Se notează cu:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}(Y/X) \cdot \mathbf{S} = \begin{bmatrix} p(\hat{x}_1/x_1) & p(\hat{x}_2/x_1) \\ p(\hat{x}_1/x_2) & p(\hat{x}_2/x_2) \end{bmatrix}.$$

Pentru a putea găsi strategia minimax se iau în considerare toate strategiile deterministe posibile cu ajutorul cărora se construiește poligonul strategiilor. Aceste strategii deterministe $\mathbf{S}_i$, matricele $\mathbf{T}_i$ și componentele vectorilor de poziție corespunzători rezultă după cum urmează:

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad r_{01} = 4; \; r_{02} = 0;$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ & \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}; \; r_{11} = 3{,}7; \; r_{12} = 1{,}5;$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ & \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}; \; r_{21} = 3{,}1; \; r_{22} = 0{,}9;$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ & \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix}; \quad r_{31} = 2{,}8; \quad r_{32} = 2{,}4;$$

$$\mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ & \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}; \quad r_{41} = 2{,}2; \quad r_{42} = 0{,}6;$$

$$\mathbf{S}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ & \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{bmatrix}; \quad r_{51} = 1{,}9; \quad r_{52} = 2{,}1;$$

$$\mathbf{S}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ & \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}; \quad r_{61} = 1{,}3; \quad r_{62} = 1{,}5;$$

$$\mathbf{S}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad r_{71} = 1; \quad r_{72} = 3$$

Strategiile deterministe $\mathbf{S}_i$ caracterizate prin vectorii de poziție $\mathbf{r}_i$ sînt reprezentate în figura 1.21,*a*.

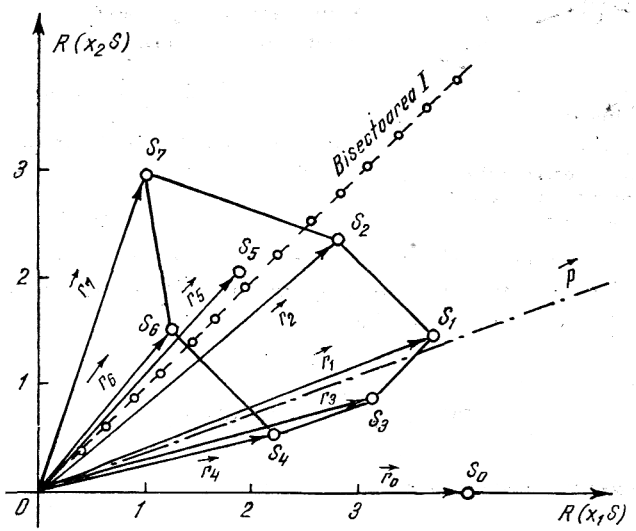


Fig. 1.21,*a*. Vectorii de poziție ai strategiilor deterministe.

Punctul S corespunzător strategiei minimax se află la intersecția dreptei $S_4 S_6$ cu prima bisectoare. Vectorul de poziție $\mathbf{r}$ al punctului S este:

$$\mathbf{r} = p_4 \mathbf{r}_6 + p_6 \mathbf{r}_4 = \mathbf{e}_1(1{,}3\, p_4 + 2{,}2\, p_6) + \mathbf{e}_2(1{,}5\, p_4 + 0{,}6\, p_6),$$

unde p_4 reprezintă probabilitatea de utilizare a strategiei $\mathbf{S}_4$, iar p_6 reprezintă probabilitatea de utilizare a strategiei $\mathbf{S}_6$.

Cum acest vector se află pe prima bisectoare, rezultă

$$1{,}3\,p_4 + 2{,}2\,p_6 = 1{,}5\,p_4 + 0{,}6\,p_6.$$

Ţinînd cont şi de condiţia

$$p_4 + p_6 = 1,$$

rezultă:

$$p_4 = 8/9 \text{ şi } p_6 = 1/9.$$

Matricea strategiei minimax, $\mathbf{S}_{MN_x}$, va fi, prin urmare:

$$\mathbf{S}_{MN_x} = p_4\,\mathbf{S}_6 + p_6\mathbf{S}_4 = 8/9\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + 1/9\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 8/9 & 1/9\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Aceasta înseamnă că strategia minimax va utiliza cu probabilitatea 8/9 strategia deterministă $\mathbf{S}_6$ şi numai cu probabilitatea 1/9 strategia $\mathbf{S}_4$. Simbolul y_2 face parte atît din submulţimea Y_1, cît şi din submulţimea Y_2. Recepţionînd y_2 în general se estimează $\hat{x}_1$, dar cu probabilitatea 1/9 se mai estimează şi $\hat{x}_2$. În figura 1.21, *b* se prezintă partiţia simbolurilor recepţionate în conformitate cu strategia aleatoare determinată.

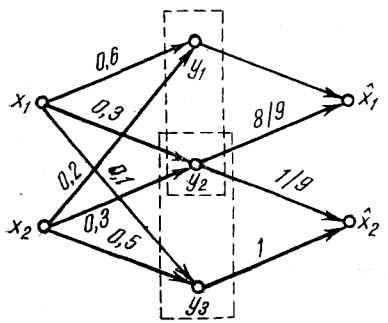


Fig. 1.21,*b*. Partiţia simbolurilor recepţionate în conformitate cu o strategie aleatoare.

În spaţiul riscului se poate găsi o reprezentare grafică şi pentru criteriul riscului minim. Dacă se notează cu:

$$\mathbf{p} = p(x_1)\,\mathbf{e}_1 + p(x_2)\,\mathbf{e}_2,$$

rezultă că riscul corespunzător unei anumite strategii este:

$$R = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_i.$$

În raport cu criteriul riscului minim va fi optimă acea strategie a cărei proiecţie pe direcţia vectorului $\mathbf{p}$ este minimă. În cazul exemplului din figura 1.21,*a*, este optimă strategia $\mathbf{S}_6$.

PROBLEME PROPUSE

1.22. *Fie canalul binar simetric cu matricea de tranziţie de forma:*

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}.$$

Se cere să se determine:

a) *valorile lui* p *care asigură valoarea maximă, respectiv valoarea minimă a capacităţii canalului;*

b) *capacitatea maximă* C_{max} *şi capacitatea minimă* C_{min}.

R. *a)* $p = 0$; $p = 1/2$; *b)* $C_{max} = 1$; $C_{min} = 0$.

1.23. *Care este structura matricei probabilităților spațiului produs intrare-ieșire* $\mathbf{P}(X,Y)$ *în cazul canalului fără perturbații? Dar în cazul canalului cu perturbații foarte mari?*

R.
$$\mathbf{P}(X, Y) = \begin{bmatrix} p(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(x_2) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p(x_n) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}(X, Y) = \begin{bmatrix} p(x_1)\,p(y_1) & p(x_1)\,p(y_2) & \dots & p(x_1)\,p(y_n) \\ \vdots & \vdots & & \\ p(x_n)\,p(y_1) & p(x_n)\,p(y_2) & \dots & p(x_n)\,p(y_n) \end{bmatrix}.$$

1.24. *Fie un canal discret cu alfabetul de intrare format din simbolurile* x_1, x_2, x_3, x_4 *cu probabilitățile de apariție egale* $p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = p(x_4)$. *Considerînd capacitatea canalului egală cu zero, se cere să se completeze matricea de zgomot:*

$$\mathbf{P}(Y, X) = \begin{bmatrix} ? & 1/4 & ? & ? \\ 1/2 & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & 1/6 & ? \end{bmatrix}$$

R.

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & /16 & 1/12 \\ 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/12 \\ 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/12 \\ 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/12 \end{bmatrix}.$$

1.25. *Fie matricea de zgomot a unui canal, de forma:*

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & ? \\ ? & 2/3 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Se cere:

a) *să se completeze matricea de zgomot;*

b) *să se scrie matricea probabilităților spațiului produs intrare-ieșire știind că distribuția probabilităților alfabetului de intrare este uniformă.*

R.

a) $$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/12 & 2/3 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

b) $$\mathbf{P}(X, Y) = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/6 & 1/12 \\ 1/24 & 1/3 & 1/8 \end{bmatrix}.$$

1.26. *O sursă discretă se caracterizează prin:*

$$[S] = [s_1, s_2, s_3, s_4];$$

$$\mathbf{P}(S) = [1/2 \;\; 1/4 \;\; 1/8 \;\; 1/8\;].$$

Se cere să se calculeze:

a) *entropia sursei;*

b) *redundanța sursei;*
c) *eficiența sursei;*
d) *debitul de informație dacă duratele simbolurilor sînt* $\tau_1 = 1$ s, $\tau_2 = 3$ s, $\tau_3 = 3$ s *și* $\tau_4 = 5$ s.

R. *a)* $H(S) = 1{,}75$ bit/simbol; *b)* $R(S) = 0{,}25$ bit/simbol; *c)* $\eta(S) = 0{,}87$; *d)* $H_t(S) = 0{,}78$ bit/s.

1.27. *Matricea probabilităților cîmpurilor reunite intrare-ieșire a unui canal discret este de forma:*

$$\mathbf{P}(X, Y) = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}25 \\ 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}15 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se calculeze:

a) *entropiile cîmpurilor de la intrare și de la ieșire;*
b) *eroarea medie și echivocația;*
c) *entropia cîmpurilor reunite;*
d) *transinformația.*

R. *a)* $H(X) = 1{,}51$ bit/simbol; $H(Y) = 0{,}97$ bit/simbol;
b) $H(X/Y) = 1{,}25$ bit/simbol; $H(Y/X) = 0{,}71$ bit/simbol;
c) $H(X, Y) = 2{,}28$ bit/simbol;
d) $I(X, Y) = 0{,}255$ bit/simbol.

1.28. *La intrarea unui canal de transmisiune caracterizat prin matricea de zgomot*

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

se aplică simbolurile x_1 *și* x_2 *cu probabilitățile* $p(x_1) = 3/4$ *și* $p(x_2) = 1/4$.

Se cere:

a) *să se facă partiția simbolurilor recepționate, pe baza criteriului plauzibilității maxime;*

b) *să se scrie matricea strategiei;*

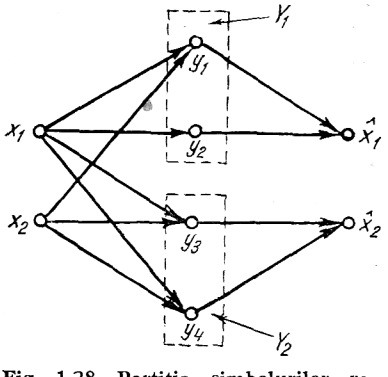


Fig. 1.28. Partiția simbolurilor recepționate conform criteriului plauzibilității maxime.

c) *să se calculeze matricea de tranziție a canalului echivalent;*
d) *să se calculeze eroarea medie înainte și după decizie.*

R. *a)* Partiția simbolurilor recepționate pe baza criteriului plauzibilității maxime este prezentată în figura 1.28.

b) $$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

c) $$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix};$$

d) $\mathbf{H}(Y/X) = 7/4$ bit/simbol; $\mathbf{H}(\hat{X}/X) = 1{,}208$ bit/simbol.

1.29. *Să se calculeze entropia maximă a unui sistem în cazul în care acesta este constituit din:*

a) *două elemente, fiecare avînd cîte două stări distincte;*
b) *trei elemente, fiecare avînd cîte patru stări distincte;*
c) *patru elemente, fiecare avînd cîte trei stări distincte.*

R. *a*) $H_1 = \log_2 2^2 = 2$ bit/simbol;
b) $H_2 = \log_2 4^3 = 6$ bit/simbol;
c) $H_3 = \log_2 3^4 = 6{,}32$ bit/simbol.

1.30. *La intrarea unui canal binar avînd matricea de tranziție de forma:*

$$\mathbf{P}(Y/X) = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

se aplică simbolurile x_1 *și* x_2 *cu probabilitățile* $p(x_1) = 1/3$ *și* $p(x_2) = 2/3$. *Să se facă partiția simbolurilor recepționate pe baza criteriului riscului minim, matricea costurilor fiind de forma:*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

R.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Spătaru, Al. *Teoria transmisiunii informației*, vol. I. (Semnale și preturbații). Ed. Tehnică, 1966.
2. Spătaru, Al. *Teoria transmisiunii informației*, vol. II. (Coduri și decizii statistice), Ed. Tehnică, 1971.
3. Tîmbal, V. P. *Zadacinik po teorii informații i codirovaniiu*. Vișcea Școla, Kiev, 1976.
4. Temesi, A., Dalos, Gy. *Hirközléselméleti példatàr*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
5. Ferenczy, P *Hirközléselmélet*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

CAPITOLUL 2

CODURI

INTRODUCERE TEORETICĂ

Codarea surselor discrete se face în două scopuri distincte: fie pentru *mărirea eficienței transmisiei prin reducerea redundanței,* respectiv prin micșorarea numărului de simboluri în fiecare cuvînt de cod, fie pentru *îmbunătățirea stabilității la perturbații prin introducerea unei redundanțe,* respectiv prin adăugarea la simbolurile informaționale din cuvîntul de cod a unor simboluri de control, care să permită detecția sau corecția erorilor. Pentru realizarea primului deziderat se utilizează coduri cu lungime medie cît mai mică a cuvintelor, numite optimale și obținute printr-o *codare compactă,* iar pentru realizarea celuilalt deziderat se utilizează *coduri detectoare sau corectoare de erori.*

A. Coduri compacte

Pentru **codare compactă** se folosesc *algoritmii Shannon-Fano* sau *Huffman,* descriși în [2] (v. problemele 2.1 și 2.2).

Fie o sursă caracterizată prin alfabetul $[S]$ cu N simboluri și matricea probabilităților $\mathbf{P}$:

$$[S] = [s_1, s_2, \ldots, s_N];$$

$$\mathbf{P} = [p(s_1)\ p(s_2) \ldots p(s_N)].$$

Prin operația de codare compactă, se poate aloca fiecărui simbol s_i al sursei un cuvînt de cod c_i de lungime l_i constituit din litere ale alfabetului $[X]$ al codului:

$$[X] = [x_1, x_2, \ldots, x_D],$$

unde D este numărul de litere al alfabetului $[X]$.

— **Dacă probabilitățile** $p(s_i)$ **sînt puteri negative întregi ale numărului de litere** D, atunci *lungimea unui cuvînt* este:

$$l_i = -\log_D p(s_i), \tag{2.1}$$

iar *lungimea medie*:

$$\bar{l} = \sum_{i=1}^{N} p(s_i)\, l_i \tag{2.2}$$

devine cu relația (2.1):

$$\bar{l} = -\sum_{i=1}^{N} p(s_i) \log_D p(s_i) = -\frac{1}{\log_2 D} \sum_{i=1}^{N} p(s_i) \log_2 p(s_i) = \frac{H(S)}{\log_2 D}.$$

Se poate arăta că această valoare a lungimii medii $\bar{l}$ este valoarea minimă, respectiv că:

$$\bar{l}_{min} = \frac{H(S)}{\log_2 D}. \tag{2.3}$$

Codurile pentru care $\bar{l} = \bar{l}_{min}$ se numesc *coduri absolut optimale*.
Se pot defini:

- *eficiența codului*:

$$\eta = \frac{\bar{l}_{min}}{\bar{l}}; \tag{2.4}$$

- *redundanța codului*:

$$\rho = 1 - \eta. \tag{2.5}$$

Se constată că pentru codurile absolut optimale eficiența este unitară iar redundanța este nulă.

— **Dacă probabilitățile** $p(s_i)$ **nu sînt puteri negative întregi ale numărului** D, atunci pentru *lungimea* l_i *a unui cuvînt de cod* se alege numărul întreg imediat superior lui $-\log_D p(s_i) = \log_D 1/p(s_i)$, așa încît:

$$\log_D \frac{1}{p(s_i)} \leqslant l_i \leqslant \log_D \frac{1}{p(s_i)} + 1. \tag{2.6}$$

În acest caz *lungimea medie* $\bar{l}$ a cuvintelor de cod satisface relația:

$$\bar{l}_{min} = \frac{H(S)}{\log_2 D} \leqslant \bar{l} \leqslant \frac{H(S)}{\log_2 D} + 1 \tag{2.7}$$

și se constată că ea este mai mare decît valoarea minimă $\bar{l}_{min}$. Astfel de coduri se numesc *coduri optimale*. Pentru aceste coduri eficiența este subunitară, ar redundanța este mai mare ca zero.

Prin procedeele de codare compactă, simbolurilor mai probabile ale sursei li se asociază cuvinte de cod mai scurte, iar simbolurilor mai puțin probabile — cuvinte mai lungi (v. relațiile (2.1) și (2.7)). Lungimile cuvintelor obținute prin procedee de codare compactă satisfac inegalitatea lui Mc-Millan:

$$\sum_{i=1}^{N} D^{-l_i} \leqslant 1. \tag{2.8}$$

Inegalitatea lui Mc-Millan devine egalitate pentru codurile absolut optimale:

$$\sum_{i=1}^{N} D^{-l_i} = \sum_{i=1}^{N} p(s_i) = 1. \tag{2.9}$$

○ **Notă.** Codurile rezultate prin procedeele de codare compactă sînt *coduri cu proprietate de prefix* caracterizate prin aceea că din cuvinte scurte nu se pot forma cuvinte mai lungi; aceste coduri se mai numesc și *instantanee* sau *ireductibile*.

B. Coduri detectoare și corectoare de erori

Pentru detecția și corecția erorilor singulare se folosesc în special **coduri bloc,** din această categorie făcînd parte *codurile grup* și *codurile ciclice.*

Determinarea numărului de simboluri. Un cuvînt de cod de lungime n are k simboluri de informație și m simboluri de control și poate fi reprezentat sub forma matricei linie:

$$\mathbf{v} = [a_1\ a_2 \ldots \ldots a_n], \tag{2.10}$$

unde $n = m + k$.

Dacă se folosește pentru codare un alfabet $[X] = [0,1]$, pentru transmiterea a N simboluri ale sursei sînt necesare un număr k de simboluri de informație, număr care satisface relația:

$$2^k \geqslant N. \tag{2.11}$$

— *Pentru a corecta* e *erori,* codul trebuie să aibă un număr de simboluri de control stabilit de marginile Hamming sau Varșamov-Gilbert:

- *marginea Hamming*:

$$2^m \geqslant \sum_{i=0}^{e} C_n^i \tag{2.12,a}$$

(C_n^i sînt combinări de n elemente luate cîte i), care reprezintă o condiție necesară, dar nu suficientă pentru stabilirea lui m; pentru cazul corecției unei singure erori ($e = 1$) relația (2.12,*a*) se poate pune sub forma:

$$2^m \geqslant C_n^0 + C_n^1$$

sau:

$$2^m - 1 \geqslant n, \tag{2.12,b}$$

deoarece $C_n^0 = 1$ iar $C_n^1 = n$;

- *marginea Varșamov-Gilbert*:

$$2^m \geqslant \sum_{i=1}^{2e-1} C_{n-1}^i, \tag{2.13}$$

care reprezintă o condiție suficientă, dar nu necesară pentru determinarea lui m.

Distanța între cuvintele de cod.

— *Pentru ca un cod să poată avea proprietăți de corecție,* este necesar ca din mulțimea de cuvinte de n litere, numai o parte să constituie cuvinte cu sens. Rezultă astfel în spațiul cuvintelor o distanță între cuvintele de cod $\mathbf{v}_j = [a_{j1}\ a_{j2} \ldots a_{jn}]$ și $\mathbf{v}_i = [a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}]$, care a fost definită de Hamming în următorul mod:

$$d(\mathbf{v}_i,\ \mathbf{v}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \oplus a_{ik}, \tag{2.14}$$

unde Σ reprezintă însumarea în corpul numerelor reale, iar $\oplus$ adunarea modulo doi; distanța dintre două cuvinte de cod este egală cu numărul

poziţiilor prin care cele două cuvinte diferă. Se observă cu uşurinţă că distanţa dintre cuvintele de cod $\mathbf{v}_i$ şi $\mathbf{v}_j$ reprezintă ponderea unui cuvînt de cod $\mathbf{v}_l = \mathbf{v}_i \oplus \mathbf{v}_j$:

$$d(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = P(\mathbf{v}_l). \tag{2.15}$$

Condiţia necesară şi suficientă pe care trebuie să o îndeplinească distanţa dintre cuvinte pentru ca să se poată corecta e *erori* este ca:

$$d_{min} = P_{min} = 2e + 1. \tag{2.16}$$

— *Pentru detecţia a* e *erori* condiţia este:

$$d_{min} = P_{min} = e + 1. \tag{2.17}$$

Se observă că un cod corector de e erori este detector de $2e$ erori.

Matricea de control şi matricea generatoare. Orice cod corector sau detector de erori este caracterizat prin *matricea de control* **H,** care are m linii şi n coloane, şi de *matricea generatoare* **G,** care are k linii şi n coloane. Între aceste două matrice există relaţia:

$$\mathbf{H}\mathbf{G}^T = 0, \tag{2.18}$$

unde $\mathbf{G}^T$ este matricea transpusă matricei **G.**

Orice cuvînt de cod, fiind o combinaţie liniară a liniilor matricei **G,** satisface relaţia:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^T = 0. \tag{2.19}$$

Relaţia (2.19) permite determinarea simbolurilor de control cînd se cunosc simbolurile de informaţie, operaţie efectuată la *codare.*

Dacă se admite o reprezentare a matricei **H** de forma:

$$\mathbf{H} = [h_1\ h_2\ \ldots\ h_n], \tag{2.20}$$

pentru un cuvînt eronat $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$ (unde $\boldsymbol{\varepsilon}$ este cuvîntul eroare) se poate defini corectorul $\mathbf{z}$ utilizînd relaţia:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}(\mathbf{v}')^T = \mathbf{H}(\mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon})^T = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}^T. \tag{2.21}$$

La *decodare,* cu relaţia (2.21) se calculează corectorul. Urmează ca pe baza unei corespondenţe biunivoce între corector şi poziţia eronată să se stabilească poziţia eronată, pentru ca, după aceea, să se corecteze eroarea.

— *Pentru a putea face corecţia a* e *erori,* oricare $2e + 1$ coloane ale matricei **H** trebuie să fie liniar independente (sau, sumele oricăror e coloane ale matricei **H** trebuie să difere de sumele oricăror altor e coloane ale matricei **H**).

— *Pentru a putea face detecţia a* e *erori,* $e + 1$ coloane ale matricei **H** trebuie să fie liniar independente (sau, sumele oricăror e coloane ale matricei **H** trebuie să fie diferită de zero).

● **La codurile grup** cuvintele de cod se reprezintă sub formă de vectori şi formează un grup faţă de operaţia $\oplus$.

Mulţimea $[W]$ a tuturor cuvintelor de lungime n conţine 2^n elemente. Dintre acestea, numai o parte, şi anume 2^k, alcătuiesc mulţimea $[V]$ a cuvintelor de cod. Celelalte $2^n - 2^k$ cuvinte se pot considera a fi rezultatul recepţiei eronate a cuvintelor de cod, în jurul fiecărui cuvînt de cod putîn-

du-se grupa $(2^n - 2^k)/2^k$ sau $2^{n-k} - 1$ cuvinte eronate $\mathbf{v}'_j$. Aceasta se obține însumînd la cuvîntul de cod $\mathbf{v}_j$ $2^m - 1$ cuvinte eroare, corespunzătoare combinațiilor de erori corectabile și deci:

$$\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j \oplus \boldsymbol{\varepsilon}_n, \text{ cu } n \leqslant 2^m - 1. \tag{2.22}$$

Mulțimea obținută însumînd la cuvintele corecte un cuvînt eroare $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ reprezintă o clasă alăturată *mulțimii sau clasei* $[V]$; există un număr de $2^m - 1$ clase alăturate clasei $[V]$, care epuizează mulțimea tuturor cuvintelor fără sens din mulțimea $[W]$.

— Dacă se transmite cuvîntul de cod $\mathbf{v}_j$, pentru a-l putea decoda corect este necesar ca orice cuvînt recepționat $\mathbf{v}'_j$ să se găsească în tabloul claselor alăturate. Se poate deci considera că *probabilitatea decodării corecte* este:

$$p_c = p\{(\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_0) \cup (\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_1) \cup \ldots \cup \mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_{2^m-1}\}$$

sau

$$p_c = p\{\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_0\} + p\{\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_1\} + \ldots + p\{\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_{2^m-1}\}.$$

Dacă admitem o transmisie pe un canal binar simetric, rezultă:

$$p_c = \sum_{i=0}^{e} n_i q^{n-i} p^i, \tag{2.23}$$

unde e reprezintă numărul cel mai mare de erori care pot fi corectate cu ajutorul tabelei claselor alăturate, p este probabilitatea erorii la un canal binar simetric, $q = 1 - p$, iar n_i este numărul de combinații corectabile de i erori.

— *Probabilitatea decodării eronate* este:

$$p_e = 1 - p_c = 1 - \sum_{i=0}^{e} n_i (1-p)^{n-i} p^i. \tag{2.24}$$

— Vectorii bază ai spațiului $[V]$ sînt în număr de k și determină liniile *matricei generatoare* $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \cdots g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} \cdots g_{2n} \\ \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} \cdots g_{kn} \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Cu ajutorul unor transformări elementare, matricea $\mathbf{G}$ poate fi adusă la una dintre formele canonice echivalente din punctul de vedere al capacităților de corecție:

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & p_{11} \ldots p_{1m} \\ 0 & 1 \ldots 0 & p_{21} \ldots p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 1 & p_{k1} \ldots p_{km} \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_n \mathbf{P}] \tag{2.26}$$

sau:

$$\mathbf{G}'' = \begin{bmatrix} p_{11} \ldots p_{1m} & 1 & 0 \ldots 0 \\ p_{21} \ldots p_{2m} & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} \ldots p_{km} & 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{P}\mathbf{I}_k]. \tag{2.27}$$

— Mulțimea tuturor vectorilor ortogonali pe vectorii din **V** formează un spațiu ai cărui vectori bază determină liniile *matricei de control* **H**:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \dots h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} \dots h_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} \dots h_{mn} \end{bmatrix} = [\mathbf{h}_1\, \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_n]. \tag{2.28}$$

Prin transformări elementare, și această matrice poate fi adusă la una dintre formele canonice echivalente din punctul de vedere al posibilităților de corecție:

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \dots q_{1k} & 1\ 0 \dots 0 \\ q_{21} & q_{22} \dots q_{2k} & 0\ 1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ q_{m1} & q_{m2} \dots q_{mk} & 0\ 0 \dots 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}\mathbf{I}_m] \tag{2.29}$$

sau

$$\mathbf{H}'' = \begin{bmatrix} 1\ 0 \dots 0 & q_{11} & q_{12} \dots q_{1k} \\ 0\ 1\ 0 & q_{21} & q_{22} \dots q_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0\ 0\ 1 & q_{m1} & q_{m2} \dots q_{mk} \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_m\mathbf{Q}]. \tag{2.30}$$

Avînd în vedere relația (2.18) dintre matricele **H** și **G**, rezultă relațiile:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T \tag{2.31}$$

și

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^T \tag{2.32}$$

dintre matricele **P** și **Q**.

— Unul dintre codurile grup cele mai cunoscute este *codul Hamming corector de o eroare*, la care coloana $\mathbf{h}_j$ a matricei **H** este reprezentarea binară a numărului j. Datorită acestui fapt, orice corector este reprezentarea binară a poziției erorii respective din cuvîntul de cod.

Codul Hamming este nesistematic, respectiv pozițiile de control sînt $1, 2, 4 \dots 2^{m-1}$, corespunzînd unor vectori-coloană cu o singură poziție diferită de zero, ceea ce ușurează determinarea simbolurilor de control din relația (2.19).

Dacă, pe lîngă corecția unei erori, trebuie să se asigure și detecția erorilor duble, matricea de control **H** capătă structura:

$$\mathbf{H}^1 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{h}_1\ \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_n \\ 1 & 1\ 1 \dots 1 \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

unde $\mathbf{h}_1\, \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_n$ este matricea de control a codului Hamming corector de o eroare. La cele m simboluri de control ale codului corector de o eroare se mai adaugă un simbol de verificare la paritate, numărul total m^1 al simbolurilor de control fiind $m^1 = m + 1$.

Corectorul este pentru acest cod:

$$\mathbf{z}^1 = \mathbf{H}^1(\mathbf{v}')^T = \mathbf{H}^1\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left[\frac{\mathbf{z}}{z_0}\right]. \tag{2.34}$$

Dacă $z_0 = 0$ și $\mathbf{z} = 0$, atunci nu apar erori.
Dacă $z_0 = 0$ și $\mathbf{z} \neq 0$, atunci sînt două erori, detectabile.
Dacă $z_0 = 1$ există o singură eroare, corectabilă, a cărei poziție este determinată de **z**.

● **La codurile ciclice,** cuvîntului de cod reprezentat prin vectorul:

$$\mathbf{v} = [a_0 \quad a_1 \ldots a_{n-1}]$$

i se atașează polinomul:

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}. \tag{2.35}$$

Coeficienții polinomului sînt elementele unui cîmp cu două elemente, 0, 1. Cuvîntul fiind identificat cu un polinom, constituie un element al unei algebre liniare în care pe lîngă operația de adunare se poate defini și operația de înmulțire. Dacă numărul de litere dintr-un cuvînt este n, se pot forma 2^n cuvinte. Dintre acestea, ca și la codurile grup, se consideră cuvinte cu sens numai 2^k. Cele $2^n - 2^k$ cuvinte fără sens pot fi grupate în jurul cuvintelor cu sens, alcătuind cele $2^m - 1$ așa-zise „clase de resturi modulo un polinom $p(x)$". Se alege:

$$p(x) = x^n + 1. \tag{2.36}$$

Cele 2^k cuvinte cu sens se aleg astfel încît să aibă o proprietate comună, pe care restul cuvintelor nu o au, și anume aceea de a fi multipli ai polinomului generator $g(x)$, respectiv de a face parte din idealul generat de polinomul $g(x)$ de grad m, divizor al polinomului $p(x)$. Dimensiunile idealului fiind $k = n - m$, orice cuvînt de cod poate fi exprimat printr-o combinație liniară a următoarelor k polinoame:

$$g(x),\ xg(x) \ldots x^{k-1}g(x). \tag{2.37}$$

— Coeficienții polinoamelor de mai sus determină liniile *matricei generatoare* **G**:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x) \\ xg(x) \\ \vdots \\ x^{k-1}\,g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 \ldots g_m & 0 \ldots 0 \\ 0 & g_0 \ldots g_{m-1} & g_m \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots \ldots & g_0 \ldots g_m \end{bmatrix}. \tag{2.38}$$

— Pentru orice polinom $g(x)$ divizor al polinomului $p(x)$ există un polinom de control:

$$h(x) = \frac{p(x)}{g(x)}. \tag{2.39}$$

Acest polinom de control generează un ideal $[J]$ de dimensiuni $m = n - k$, a cărui bază este constituită de cele m linii ale *matricei de control* **H**:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \ldots 0 & h_k & \ldots h_1 & h_0 \\ 0 & 0 \ldots h_k & h_{k-1} & \ldots h_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_k & h_{k-1}\ h_1 & h_0 & \ldots 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.40}$$

Ţinînd cont de structura matricei **H** dată de relaţia (2.40), se poate vedea cu uşurinţă că dacă $\mathbf{v}_0 = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}]$ este un cuvînt de cod ciclic, atunci şi $\mathbf{v}_j = [a_j \ a_{j-1} \ \dots \ a_0 \ \ a_{n-1} \ \dots \ a_{j+1}]$ este un cuvîntde cod, ceea ce şi justifică denumirea de „ciclic" a codului.

PROBLEME REZOLVATE

2.1. *Se consideră o sursă cu alfabetul* $[S] = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6]$ *şi probabilităţile* $\mathbf{P} = [1/2 \ \ 1/4 \ \ 1/8 \ \ 1/16 \ \ 1/32 \ \ 1/32]$. *Se cere să se determine:*

a) *un cod compact folosind algoritmul de codare Shannon-Fano; alfabetul codului este* $[X] = [0,1]$;

b) *lungimea medie* $\bar{l}$ *a cuvintelor de cod;*

c) *eficienţa* η *şi redundanţa* ρ *a codului.*

Soluţie

a) Se fac partiţii succesive ale mulţimii $[S]$, cu simbolurile s_i ordonate în sens descrescător al probabilităţilor $p(s_i)$, în submulţimi de probabilităţi egale pînă cînd fiecare submulţime conţine un singur element. Procedura

TABELUL 2.1

Mesaje s_i	*Probabilităţile* $P(s_i)$	*Partiţii*				*Cuvintele de cod* $\mathbf{c}_i$	*Lungimea* l_i
s_1	$\frac{1}{2}$	S_0				$\mathbf{c}_1 = [0]$	1
s_2	$\frac{1}{4}$	S_1	S_{10}			$\mathbf{c}_2 = [1\ 0]$	2
s_3	$\frac{1}{8}$		S_{11}	S_{110}		$\mathbf{c}_3 = [1\ 1\ 0]$	3
s_4	$\frac{1}{16}$			S_{111}	S_{1110}	$\mathbf{c}_4 = [1\ 1\ 1\ 0]$	4
s_5	$\frac{1}{32}$				S_{1111} S_{11110}	$\mathbf{c}_5 = [1\ 1\ 1\ 1\ 0]$	5
s_6	$\frac{1}{32}$				S_{11111}	$\mathbf{c}_6 = [1\ 1\ 1\ 1\ 1]$	5

de codare se poate urmări în tabelul 2.1 şi pe graful din figura 2.1.

Se observă că simbolurilor mai probabile li se alocă cuvinte de cod mai scurte. Pe graful din figura 2.1 se poate vedea că se obţine un cod cu proprietate de prefix: fiecare cuvînt de cod c_i este punct terminal în arborele de cod şi deci din nici un cuvînt scurt nu se poate forma un cuvînt mai lung.

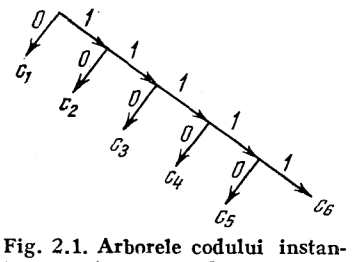


Fig. 2.1. Arborele codului instantaneu obţinut prin codare Shannon-Fano a sursei S.

b) Lungimea medie $\bar{l}$ se poate determina cu relația (2.2):

$$\bar{l} = \sum_{i=1}^{N} p(s_i)\, l_i = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{32} \cdot 5 = \frac{31}{16}.$$

c) Eficiența η a codului este, în conformitate cu relația (2.4):

$$\eta = \frac{\bar{l}_{min}}{\bar{l}} = \frac{H(S)/\log_2 D}{\bar{l}} = \frac{31/16}{31/16} = 1,$$

deoarece:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{N} p(s_i) \log_2 p(s_i) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{32} \cdot 5 = \frac{31}{16} \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}.$$

Avînd $\eta = 1$, codul este absolut optimal.

Redundanța codului, conform (2.5), este $\rho = 0$.

2.2. *Se consideră o sursă cu alfabetul* $[S] = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6]$ *și probabilitățile* $\mathbf{P} = [0{,}05 \quad 0{,}1 \quad 0{,}3 \quad 0{,}25 \quad 0{,}1 \quad 0{,}2]$.

a) *Să se determine un cod compact folosind algoritmul de codare Huffman, dacă alfabetul codului este* $[X] = [0, 1]$ *și dacă alfabetul codului este* $[X] = [0, 1, 2]$.

b) *Pentru cele două cazuri să se calculeze lungimea medie a cuvintelor de cod și eficiența codului.*

Soluție

a) Algoritmul Huffman se aplică după ordonarea în sens descrescător a probabilităților simbolurilor sursei. Se grupează D simboluri cu probabilitățile cele mai mici și se formează o sursă restrînsă R_1 care conține simbolurile: $s_1, s_2, \ldots, s_{N-D}, s_{r1}$ cu probabilitățile $p(s_1), p(s_2), \ldots, p(s_{N-D}), p(s_{r1})$, unde $p(s_{r1}) = p(s_N) + p(s_{N-1}) + \ldots p(s_{N-D-1})$. Procedeul se continuă pînă cînd se ajunge la o sursă restrînsă cu D simboluri cărora li se alocă cuvinte de de cod care încep cu 0,1 ,...., D. Literele următoare ale cuvîntului de cod alocat fiecărui simbol se obțin parcurgînd sursele restrînse în sensul opus restrîngerii și alocînd litere 0,1, ..., D pînă la regăsirea simbolului original.

Codarea Huffman *pentru* D = 2 este dată în tabelul 2.2, *a*.

TABELUL 2.2,*a*

Simbolurile sursei	*Probabilitățile* $\mathbf{P}(s_i)$	*Probabilitățile mesajelor surselor restrînse* R_n				*Cuvintele* $\mathbf{c}_i$
		$\mathbf{P}_{R_1}$	$\mathbf{P}_{R_2}$	P_{R_3}	$\mathbf{P}_{R_4}$	
					0,55 } 0	
				0,45 →	0,45 } 1	
s_3	0,3	0,3	0,3	0,30 } 00		$\mathbf{c}_3 = [0\ 0]$
s_4	0,25	0,25	0,25	0,25 } 01		$\mathbf{c}_4 = [0\ 1]$
			0,25 } 10 →			
s_6	0,20	0,20	0,20 } 11			$\mathbf{c}_6 = [1\ 1]$
		0,15 } 100 →				
s_2	0,10	0,10 } 101				$\mathbf{c}_2 = [1\ 0\ 1]$
s_5	0,10 } 1000					$\mathbf{c}_5 = [1\ 0\ 0\ 0]$
s_1	0,05 } 1001					$\mathbf{c}_1 = [1\ 0\ 0\ 1]$

○ **Observație.** Pentru codarea Huffman cu D simboluri, trebuie avut în vedere că după prima restrîngere se obține o sursă cu $N - D + 1 = N - (D - 1)$ simboluri, iar după n restrîngeri — o sursă cu $N - n(D - 1)$ simboluri. Pentru a putea efectua operația de codare, ultima sursă trebuie să aibă D elemente, deci: $D = N - n(D - 1)$ sau $N = n(D - 1) + D$, de unde rezultă:

$$n = \frac{N - D}{D - 1}.$$

Dacă $D = 3$ (ca în al doilea caz — pct. „*a*"), avînd $N = 6$ se obține un număr de surse restrînse $n = 3/2$, care nu este un număr întreg. Alegînd $n = 2$ rezultă $N = 7$. Va trebui deci să adăugăm sursei $[S]$ simbolul s_7 cu $p(s_7) = 0$. Codarea Huffman pentru $D = 3$ este dată în tabelul 2.2,*b*.

TABELUL 2.2,b

Simbolurile sursei	*Probabilitățile* $P(s_i)$	*Probabilitățile surselor restrînse* R_i				*Cuvintele* c_i
		P_{R_1}		P_{R_2}		
				0,45	0	
s_3	0,30			0,30	1	$c_3 = [1]$
s_4	0,25			0,25	2	$c_4 = [2]$
s_6	0,20	0,20	00			$c_6 = [0\ 0]$
		0,15	01			
s_2	0,10	0,10	02			$c_2 = [0\ 2]$
s_5	0,10	010				$c_5 = [0\ 1\ 0]$
s_1	0,05	011				$c_1 = [0\ 1\ 1]$
s_7	0,00	012				$c_7 = [0\ 1\ 2]$

Graful corespunzător codării Huffman cu $D = 2$ este dat în figura 2.2,*a*, iar graful corespunzător codării Huffman cu $D = 3$ este dat în figura 2.2,*b*. Se observă din arborii de cod că ambele coduri sînt ireductibile.

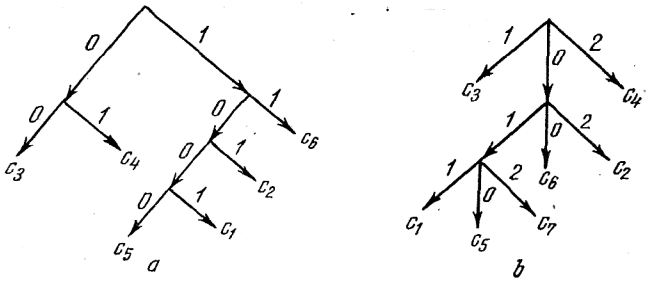


Fig. 2.2. Arborele codului instantaneu obținut prin codare Huffman a sursei S:
a — cu $D = 2$ simboluri; b — cu $D = 3$ simboluri.

b) Folosind relaţiile (2.2), (2.3) şi (2.4) se obţine *pentru* $D = 2$:

$$l = 2 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}05 = 2{,}4;$$

$$\bar{l}_{min} = \frac{H(S)}{\log_2 D} = H(S) = -[0{,}3 \log 0{,}3 + 0{,}25 \log 0{,}25 + 0{,}2 \log 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 \log 0{,}1 + 0{,}05 \log 0{,}05] = 2{,}3;$$

$$\eta = \frac{\bar{l}_{min}}{\bar{l}} = \frac{2{,}3}{2{,}4} = 0{,}96.$$

Pentru $D = 3$ rezultă, cu aceleaşi relaţii:

$$\bar{l} = 1 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}05 = 1{,}6;$$

$$\bar{l}_{min} = \frac{H(S)}{\log_2 D} = \frac{2{,}3}{1{,}6} = 1{,}44;$$

$$\eta = \frac{\bar{l}_{min}}{\bar{l}} = \frac{1{,}44}{1{,}6} = 0{,}90.$$

2.3. *Se consideră o sursă cu alfabetul* $[S] = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8]$ *şi probabilităţile* $\mathbf{P} = [1/2\ \ 1/4\ \ 1/8\ \ 1/16\ \ 1/64\ \ 1/64\ \ 1/64\ \ 1/64]$.

Se cere:

a) *să se găsească un cod binar pentru care* $\bar{l}$ *este minim;*

b) *să se găsească un cod binar pentru care* l_{max} *este minim;*

c) *să se găsească un cod binar pentru care* $l_{max} = 4$ *şi* $\bar{l}$ *este minim;*

d) *să se calculeze pentru fiecare dintre cele trei cazuri eficienţa codului.*

Soluţie

a) Se poate adopta un procedeu de codare compactă, de exemplu, procedeul Huffman. Codarea Huffman pentru această sursă este dată în tabelul 2.3.

Lungimile cuvintelor de cod sînt:

$$l_1 = 1;\ l_2 = 2;\ l_3 = 3;\ l_4 = 4,\ l_5 = l_6 = l_7 = l_8 = 6.$$

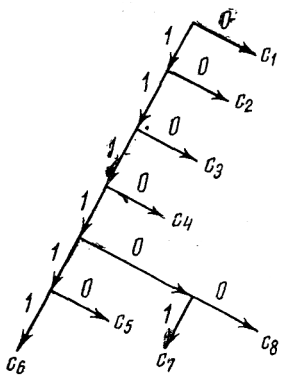


Fig. 2.3,*a*. Arborele codului instantaneu obţinut prin codare Huffman a sursei *S*.

Lungimea medie este conform relaţiei (2.2):

$$\bar{l} = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{64} = 2.$$

Folosind relaţiile (2.1) şi (2.3) rezultă:

$$\bar{l} = \bar{l}_{min} = 2 = H(S).$$

Arborele de cod este prezentat în figura 2.3, *a*, codul obţinut fiind instantaneu.

b) Dacă nu se adoptă regula de codare compactă (de a atribui cuvinte de cod lungi simbolurilor mai puţin probabile şi cuvinte de cod scurte simbolurilor mai probabile), se poate obţine un cod cu l_{max} mai mic. Valoarea minimă a lungimii l_{max} se obţine

TABELUL 2.3

[S]	P	P_{R_1}	P_{R_2}	P_{R_3}	P_{R_4}	P_{R_5}	P_{R_6}	Cuvintele c_i
s_1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2 → 0	$c_1 = [0]$
s_2	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/2 → 1	$c_2 = [1\ 0]$
s_3	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	10 → 11		$c_3 = [1\ 1\ 0]$
s_4	1/16	1/16	1/16	1/16	110 → 111	1/4		$c_4 = [1\ 1\ 1\ 0]$
		1/32	1/32	1110 → 1111	1/8			
s_5	1/64	1/64	11110 → 11111	1/16				$c_5 = [111110]$
s_6	1/64	1/64	111110 → 111111	1/32				$c_6 = [111111]$
s_7	1/64	111100 → 111101						$c_7 = [111100]$
s_8	1/64							$c_8 = [111101]$

dacă fiecărui simbol i se alocă reprezentarea binară a cîte unuia dintre numerele de la 0 la 7. Valoarea lui l_{max} se poate determina din relația:

$$2^{l_{max}} \leqslant N = 8$$

și se obține

$$l_{max} = 3.$$

Se poate obține astfel următorul cod: $\mathbf{c}_1 \equiv [0\ 0\ 1]$, $\mathbf{c}_2 = [0\ 1\ 0]$, $\mathbf{c}_3 \equiv [0\ 1\ 1]$, $\mathbf{c}_4 \equiv [1\ 0\ 0]$, $\mathbf{c}_5 \equiv [1\ 0\ 1]$, $\mathbf{c}_6 \equiv [1\ 1\ 0]$, $\mathbf{c}_7 \equiv [1\ 1\ 1]$, $\mathbf{c}_8 = [0\ 0\ 0]$. Se vede din arborele de cod din figura 2.3, *b* că și acest cod este instantaneu.

c) Dacă $l_{max} = 4$, codul va avea n_4 cuvinte de cîte patru simboluri, n_3 cuvinte de cîte trei simboluri, n_2 cuvinte de cîte două simboluri și n_1 cuvinte

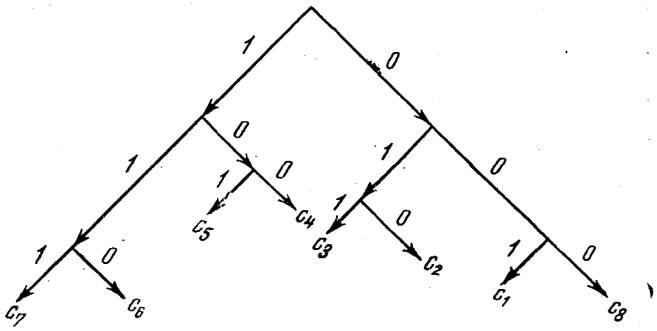


Fig. 2.3,*b*. Arborele codului instantaneu obținut prin codarea binar-naturală a sursei *S*.

de cîte un simbol. Se notează prin $n_{iM} = 2^i$ numărul maxim al cuvintelor de cîte i simboluri ($i = 1, 2, 3, 4$). Numerele n_1, n_2, n_3, n_4 trebuie să satisfacă următoarele condiții:

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = N;$$

$$n_1 \cdot 2^{-1} + n_2 \cdot 2^{-2} + n_3 \cdot 2^{-3} + n_4 \cdot 2^{-4} = 1 \text{ (v. rel. (2.9))};$$

$$1 \leqslant n_4 \leqslant min\ (n_{4M},\ N);$$

$$0 \leqslant n_3 \leqslant min\ (n_{3M},\ N);$$

$$0 \leqslant n_2 \leqslant min\ (n_{2M},\ N);$$

$$0 \leqslant n_1 \leqslant min\ (n_{1M},\ N).$$

Prin introducerea valorilor numerice, sistemul de mai sus devine:

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 8;$$

$$8\,n_1 + 4\,n_2 + 2n_3 + n_4 = 16;$$

$$1 \leqslant n_4 \leqslant 8;$$

$$0 \leqslant n_3 \leqslant 8;$$

$$0 \leqslant n_2 \leqslant 4;$$

$$0 \leqslant n_1 \leqslant 2.$$

Scăzînd primele două relații din sistem se obține:

$$7n_1 + 3n_2 + n_3 = 8.$$

Se va rezolva în numere întregi ecuația de mai sus, dînd lui n_1 cele trei valori posibile: 0, 1 și 2.

- *Fie* $n_1 = 0$; se va rezolva ecuația:

$$3\,n_2 + n_3 = 8,$$

deducînd valoarea lui n_3 pentru cele patru valori posibile: 0, 1, 2, 3 ale lui n_2 și obținînd din ecuația precedentă valoarea lui n_4 corespunzătoare fiecărui caz. Se obține pentru:

$n_2 = 0$, $n_3 = 8$, $n_4 = 0$, ceea ce contravine condiției $n_4 \geq 1$;

$n_2 = 1$, $n_3 = 5$, $n_4 = 2$;

$n_2 = 2$, $n_3 = 2$, $n_4 = 4$;

$n_2 = 3$, 4, n_3 devine negativ.

- *Fie* $n_1 = 1$; se va rezolva ecuația:

$$3n_2 + n_3 = 1$$

și rezultă pentru:

$n_2 = 0$, $n_3 = 1$, $n_4 = 6$;

$n_2 = 1, 2, 3, 4$, n_3 devine negativ.

• *Fie* $n_1 = 2$; rezultă valori negative atît pentru n_2, cît și pentru n_3.

Rezumînd rezultatele de mai sus se obțin următoarele coduri:

A) $n_1 = 0$; $n_2 = 1$; $n_3 = 5$; $n_4 = 2$;

B) $n_1 = 0$; $n_2 = 2$; $n_3 = 2$; $n_4 = 4$;

C) $n_1 = 1$; $n_2 = 0$; $n_3 = 1$; $n_4 = 6$.

Cuvintele mai lungi se vor atribui mesajelor mai puțin probabile. Arborii de cod sînt dați în figurile 2.3, *c*, 2.3, *d* și 2.3, *e*; rezultă într-adevăr coduri

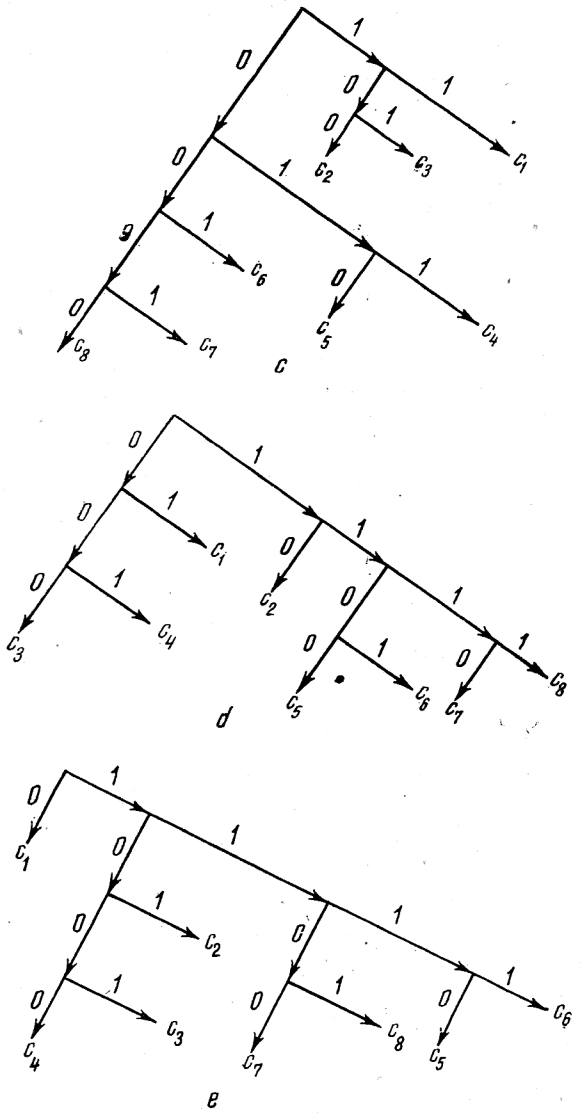


Fig. 2.3.*c,d,e*. Arborele codului instantaneu obținut prin codarea sursei S:
c — cu $l_{max} = 4$, $n_4 = 2$; d — cu $l_{max} = 4$, $n_4 = 4$; e — cu $l_{max} = 4$, $n_4 = 6$.

instantanee, cu următoarele valori ale lungimii medii a cuvintelor de cod:

$$A)\ \bar{l} = \sum_{i=1}^{N} p(s_i)\, l_i = \frac{1}{2}\cdot 2 + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\right)3 + \left(\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\right)4;$$

$$\bar{l} = 2{,}51;$$

$$B)\ \bar{l} = \sum_{i=1}^{N} p(s_i)\, l_i = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)2 + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)3 + \left(\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\right)4;$$

$$\bar{l} = 2{,}31;$$

$$C)\ \bar{l} = \sum_{i=1}^{N} p(s_i)\, l_i = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\right)4;$$

$$\bar{l} = 2{,}25.$$

d) Cunoscînd $\bar{l}_{min} = 2$ și valoarea lungimii medii $\bar{l}$ pentru fiecare dintre metodele de codare adoptate, rezultă cu relația (2.4):

$$\eta = \frac{2{,}00}{2{,}00} = 1,\ \text{pentru codul de la punctul „}a\text{“};$$

$$\eta = \frac{2{,}00}{3{,}00} = 0{,}66,\ \text{pentru codul de la punctul „}b\text{“};$$

$$\eta = \frac{\bar{l}_{min}}{\bar{l}} = \frac{2{,}00}{2{,}51} = 0{,}79,\ \text{pentru cazul } A;$$

$$\eta = \frac{\bar{l}_{min}}{\bar{l}} = \frac{2{,}00}{2{,}31} = 0{,}85,\ \text{pentru cazul } B;$$

$$\eta = \frac{\bar{l}_{min}}{\bar{l}} = \frac{2{,}00}{2{,}25} = 0{,}9,\ \text{pentru cazul } C.$$

Se observă că eficiența codului este cu atît mai mare cu cît este mai bine respectată regula de a atribui simbolurilor foarte probabile cuvinte de cod scurte.

2.4. *Un număr de 20 simboluri se transmit pe un canal cu perturbații utilizînd un cod Hamming grup corector de o eroare. Se cere:*

a) *să se determine numărul simbolurilor de informație* k, *al celor de control* m *și lungimea* n *a fiecărui cuvînt de cod;*

b) *să se scrie matricea de control a codului,* **H**;

c) *să se scrie cuvintele de cod; cît este* d_{min}? *dar* P_{min}?

d) *să se scrie formele canonice* **H′** *și* **H″** *ale matricei de control;*

e) *să se scrie formele canonice* **G′** *și* **G″** *ale matricei generatoare și să se deducă matricea* **G**;

f) *să se reprezinte schema codorului și a decodorului;*

g) *să se stabilească expresia corectorului pentru cazul în care se eronează* c_4;

h) *să se explice ce se întîmplă dacă într-un cuvînt recepționat apar două erori pe pozițiile* 2 *și* 7.

Soluție

a) Pentru a transmite $N = 20$ simboluri ale sursei este necesar un număr $k = 5$ simboluri de informație dat de relația (2.11).

Numărul simbolurilor de control $m = 4$ rezultă din expresia marginii Hamming (v. rel. (2.12, *b*)):

$$2^m - 1 \geqslant n = m + k = m + 5.$$

Lungimea cuvîntului de cod este $n = m + k = 4 + 5 = 9$.

b) Matricea de control este o matrice cu $n = 9$ coloane și $m = 4$ linii; pentru codul Hamming grup, fiecare coloană reprezintă codul binar al numărului de coloană:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Cuvîntul de cod Hamming este nesistematic și are structura $\mathbf{v} = [c_1\, c_2\, i_3\, c_4\, i_5\, i_6\, i_7\, c_8\, i_9]$. Orice cuvînt de cod satisface relația (2.19):

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^T = 0,$$

care permite determinarea simbolurilor de control c_1, c_2, c_4, c_8 în funcție de simbolurile de informație i_3, i_5, i_6, i_7, i_9 cu ajutorul sistemului:

$$c_8 = i_9;$$

$$c_4 = i_5 + i_6 + i_7;$$

$$c_2 = i_3 + i_6 + i_7;$$

$$c_1 = i_3 + i_5 + i_7 + i_9.$$

În tabelul 2.4 se dau cele 20 de cuvinte ale codului Hamming, obținute alegînd pentru simbolurile de informație 20 de combinații distincte de 0 și 1 și calculînd cu relațiile de mai sus simbolurile de control. În tabel, cele 20 de combinații reprezintă codul binar cu cinci poziții al numerelor 0 ... 19.

Din inspectarea tabelului 2.4 rezultă că $P_{min} = 3$; avînd în vedere structura de grup a codului față de suma modulo, doi, și $d_{min} = 3$, rezultat previzibil avînd în vedere relația (2.16) pentru $e = 1$.

TABELUL 2.4

Simboluri / Cuvinte	c_1	c_2	i_3	c_4	i_5	i_6	i_7	c_8	i_9
v_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
v_2	1	0	0	1	1	0	0	0	0
v_3	0	1	1	1	1	0	0	0	0
v_4	0	1	0	1	0	1	0	0	0
v_5	1	0	1	1	0	1	0	0	0
v_6	1	1	0	0	1	1	0	0	0
v_7	0	0	1	0	1	1	0	0	0
v_8	1	1	0	1	0	0	1	0	0
v_9	0	0	1	1	0	0	1	0	0
v_{10}	0	1	0	0	1	0	1	0	0
v_{11}	1	0	1	0	1	0	1	0	0
v_{12}	1	0	0	0	0	1	1	0	0
v_{13}	0	1	1	0	0	1	1	0	0
v_{14}	0	0	0	1	1	1	1	0	0
v_{15}	1	1	1	1	1	1	1	0	0
v_{16}	1	0	0	0	0	0	0	1	1
v_{17}	0	1	1	0	0	0	0	1	1
v_{18}	0	0	0	1	1	0	0	1	1
v_{19}	1	1	1	1	1	0	0	1	1

d) Formele canonice $\mathbf{H}'$ și $\mathbf{H}''$ sînt conform relațiilor (2.29) și (2.30): $\mathbf{H}' = [\mathbf{I}_m \mathbf{Q}]$ și $\mathbf{H}'' = [\mathbf{I}_m \mathbf{Q}]$:

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

și corespunde unui cuvînt de cod sistematic cu structura:
$\mathbf{v} = [i_3\ i_5\ i_6\ i_7\ i_9\ c_8\ c_4\ c_2\ c_1]$;

$$\mathbf{H}'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

și corespunde de asemenea unui cuvînt de cod sistematic, cu structura:
$\mathbf{v} = [c_8\ c_4\ c_2\ c_1\ i_3\ i_5\ i_6\ i_7\ i_9]$.

e) Formele canonice $\mathbf{G}'$ și $\mathbf{G}''$ sînt $\mathbf{G}' = [\mathbf{I}_K \mathbf{P}]$ și $\mathbf{G}'' = [\mathbf{P}\ \mathbf{I}_K]$, unde $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T$ (v. rel. (2.26), (2.27), (2.31), (2.32)). Rezultă:

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Formele canonice $\mathbf{G}'$ și $\mathbf{G}''$ corespund codurilor sistematice cu cuvinte avînd structura specificată pentru formele canonice $\mathbf{H}'$, respectiv $\mathbf{H}''$.

Formele canonice $\mathbf{H}'$ și $\mathbf{G}'$, respectiv $\mathbf{H}''$ și $\mathbf{G}''$ determină coduri cu aceleași proprietăți de corecție ca și codul determinat de matricele $\mathbf{H}$ și $\mathbf{G}$. Matricea $\mathbf{G}$ se obține prin permutări ale coloanelor matricelor $\mathbf{G}'$ și $\mathbf{G}''$, corespunde ca și matricea $\mathbf{H}$ unui cod nesistematic cu cuvinte avînd structura $\mathbf{v} = [c_1\ c_2\ i_3\ c_4\ i_5\ i_6\ i_7\ c_8\ i_9]$ și este de forma:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se recunosc în liniile matricei $\mathbf{G}$ cuvinte de cod: de exemplu, linia a 2-a este cuvîntul $\mathbf{v}_2$, linia a 3-a — cuvîntul $\mathbf{v}_4$; de pot recunoaște drept cuvinte de cod și combinații liniare ale liniilor matricei $\mathbf{G}$: de exemplu cuvînul $\mathbf{v}_3$ rezultă din însumarea liniilor *2* și *3* ale matricei $\mathbf{G}$.

f) *Codorul* este format dintr-un registru de deplasare RD_1 cu *9* celule și este reprezentat în figura 2.4,*a*. Simbolurile de informație se înscriu în celulele *9, 7, 6, 5, 3*. Simbolurile de control c_8, c_4, c_2, c_1 se înscriu în registru în celulele *8, 4, 2, 1*, respectiv de la ieșirea celulei *9* și de la ieșirile sumatoarelor S_3, S_2, S_1.

Decodorul, reprezentat în figura 2.4,*b*, este format din registrul de deplasare RD_2, descifratorul binar zecimal D și sumatoarele S_4, S_5, S_6, S_7 care calculează componentele corectorului din relația (2.21):

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\mathbf{v}')^T = \begin{bmatrix} c'_8 + i'_9 \\ c'_4 + i'_7 + i'_6 + i'_5 \\ c'_2 + i'_7 + i'_6 + i'_3 \\ c'_1 + i'_7 + i'_5 + i'_3 + i'_9 \end{bmatrix}.$$

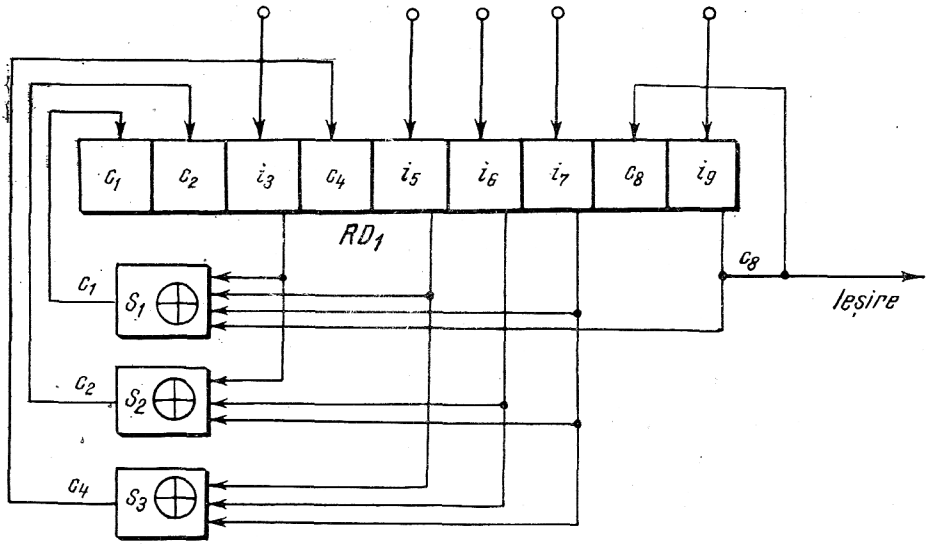


Fig. 2.4,*a*. Codorul pentru un cod Hamming grup corector de eroare, cu $n = 9$, $m = 4$.

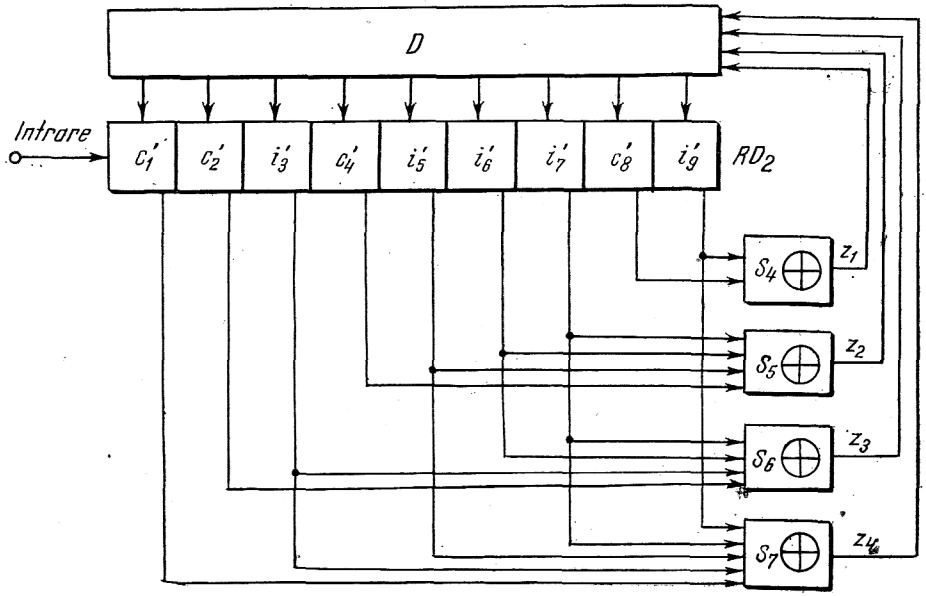


Fig. 2.4,*b*. Decodorul pentru un cod Hamming grup corector de o eroare cu $n = 9$, $m = 4$.

Corectorul z reprezintă codul binar al poziției eronate p. Descifratorul D scoate nivel 1 logic la ieșirea p; cu acest semnal este corectat conținutul celulei registrului RD_2 conectate la ieșirea p.

g) Pentru acest caz cuvîntul eroare ε este de forma:

$$\varepsilon = [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0].$$

Corectorul se poate calcula cu relația (2.21):

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}(\mathbf{v}')^T = \mathbf{H}\varepsilon^T = \mathbf{h}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

și reprezintă codul binar al poziției eronate.

h) În acest caz cuvîntul eroare este:

$$\varepsilon = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0].$$

Corectorul rezultă conform relației (2.19):

$$\mathbf{z} = [\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_7] = [\mathbf{h}_5] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Decodorul va acționa ca și cînd eroarea ar interveni pe poziția a 5-a și efectuează „corecția" presupusei erori. Rezultă că pe lîngă erorile de pe pozițiile 2 și 7 apare o eroare suplimentară pe poziția 5.

2.5. *Un număr de 8 simboluri se transmit cu ajutorul unui cod Hamming grup corector de o eroare și detector de erori duble. Se cere:*

a) *să se determine numărul simbolurilor de informație* k, *al celor de control,* m, *și lungimea cuvîntului de cod* n;

b) *să se scrie matricea de control* **H** *a codului*;

c) *să se stabilească expresia corectorului corespunzător eronării simbolului* c_2;

d) *să se determine corectorul corespunzător eronării simbolurilor* c_2 *și* c_1;

e) *să se scrie cuvintele de cod*;

f) *să se precizeze dacă* $\mathbf{v} = [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0]$ *este un cuvînt al acestui cod*

Soluție

a) Numărul simbolurilor de informație k se determină din relația (2.11): $2^k \geqslant N = 8$ și rezultă $k = 3$.

Marginea Hamming dă pentru numărul simbolurilor de control (relația 2.12): $2^m - 1 \geqslant n = m + k = m + 3$, din care rezultă $m = 3$.

La aceste simboluri de control, care permit corecția unei erori, trebuie adăugat simbolul de verificare la paritate, așa încît numărul total al simbolurilor de control va fi:

$$m^1 = m + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Structura cuvîntului de cod va fi:

$$\mathbf{v} = [c_0\ c_1\ c_2\ i_3\ c_4\ i_5\ i_6],$$

unde c_0 este simbolul de verificare a parității, iar c_1, c_2, c_4 — simbolurile de control pentru codul corector de o eroare.

b) Matricea $\mathbf{H}$ a codului corector de o eroare este de forma:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1\ \mathbf{h}_2\ \mathbf{h}_3\ \mathbf{h}_4\ \mathbf{h}_5\ \mathbf{h}_6]$$

respectiv:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cu relația (2.33) se obține pentru matricea $\mathbf{H}^1$ expresia:

$$\mathbf{H}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{h}_0^1\ \mathbf{h}_1^1\ \mathbf{h}_2^1\ \mathbf{h}_3^1\ \mathbf{h}_4^1\ \mathbf{h}_5^1\ \mathbf{h}_6^1].$$

c) Pentru acest caz cuvîntul eroare este de forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0].$$

Cu relația (2.34) rezultă pentru expresia corectorului

$$\mathbf{z}^1 = [\mathbf{h}_2^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Din expresia corectorului rezultă că apare o eroare corectabilă ($z_0 = 1$) pe poziția a 2-a ($\mathbf{z} = \mathbf{h}_2$).

d) Pentru acest caz cuvîntul eroare este de forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$$

și rezultă cu relația (2.34) corectorul:

$$\mathbf{z}^1 = [\mathbf{h}_1^1 + \mathbf{h}_2^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Corectorul arată că apar două erori detectabile ($z_0 = 0$ și $z \neq 0$).

e) Cuvintele de cod se pot scrie calculînd simbolurile de control din cele de informație cu relația $\mathbf{H}^1\mathbf{v}^T = 0$, din care rezultă:

$$c_4 = i_5 + i_6;$$

$$c_2 = i_3 + i_6;$$

$$c_1 = i_3 + i_5;$$

$$c_0 = c_1 + c_2 + i_3 + c_4 + i_5 + i_6 = i_3 + i_5 + i_6.$$

Cuvintele de cod se găsesc în tabelul 2.5.

TABELUL 2.5

Simboluri / Cuvinte	c_0	c_1	c_2	i_3	c_4	i_5	i_6
v_0	0	0	0	0	0	0	0
v_1	1	0	1	0	1	0	1
v_2	1	1	0	0	1	1	0
v_3	0	1	1	0	0	1	1
v_4	1	1	1	1	0	0	0
v_5	0	1	0	1	1	0	1
v_6	0	0	1	1	1	1	0
v_7	1	0	0	1	0	1	1

f) Se calculează corectorul $\mathbf{z}^1$ cu relația (2.34); rezultă:

$$\mathbf{z}^1 = \mathbf{H}^1\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \hline z_0 \end{bmatrix}.$$

Deoarece $z_0 = 0$ iar $\mathbf{z} = 0$ cuvîntul dat este un cuvînt al acestui cod, ceea ce era ușor de constatat și prin inspectarea tabelului 2.5, în care îl regăsim sub forma cuvîntului $\mathbf{v}_2$.

2.6. *Se dă matricea* **H** *a unui cod grup corector de erori:*

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se cere:

a) *să se determine numărul simbolurilor de control* (m), *de informație* (k), *lungimea* n *a cuvintelor de cod, numărul de simboluri ce se pot transmite cu ajutorul acestui cod și numărul de erori care se pot corecta;*

b) *să se precizeze structura cuvintelor de cod;*

c) *să se scrie matricea generatoare* **G** *a codului.*

Soluție

a) Se știe că matricea **H** are m linii și n coloane; rezultă $m = 7$ și $n = 10$; $h = n - m = 10 - 7 = 3$.

Cu cele trei simboluri de informație se pot transmite un număr de simboluri $N \leqslant 2^k = 8$.

Pentru a determina numărul de erori pe care le poate corecta codul, constatăm că:

— toate coloanele sînt distincte, deci se poate corecta cel puțin o eroare;

— suma oricăror două coloane este diferită de suma oricăror altor două coloane, deci se pot corecta și două erori.

Nu se poate spune că suma oricăror trei coloane ale matricei **H** diferă de suma oricăror alte trei coloane ale matricei, deci codul nu poate corecta toate erorile triple. Corectorul pentru cuvîntul eroare:

$$\varepsilon_1 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0]$$

este — de exemplu — același cu corectorul corespunzător cuvîntului eroare:

$$\varepsilon_2 = [0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ ].$$

Expresia corectorului pentru cele două cazuri este:

$$\mathbf{z} = [\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_8 + \mathbf{h}_9] = [\mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4 + \mathbf{h}_6] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

○ **Observație.** Faptul că acest cod corectează două erori se poate stabili și cu ajutorul marginilor Hamming și Varșamov-Gilbert (v. rel. (2.12) și (2.13). Pentru $e = 2$ marginea Hamming este satisfăcută cu prisosință:

$$2^m - 1 = 2^7 - 1 = 127 > C_n^1 + C_n^2 = 10 + \frac{10 \cdot 9}{2} = 55,.$$

iar marginea Varșamov-Gilbert nu este satisfăcută de puțin:

$$2^m = 128 \geqslant C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 = 1 + 9 + \frac{9 \cdot 8}{2} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 130.$$

Nici una dintre cele două margini nu este însă satisfăcută pentru $e = 3$:

$$2^m - 1 = 127 < C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 175;$$

$$2^m = 128 < C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 + C_{n-1}^5 = 382.$$

b) Matricea **H** dată corespunde unui cod sistematic la care pe primele șapte poziții sînt simbolurile de control și pe ultimele trei — simbolurile de informație. Structura de cuvînt este deci:

$$\mathbf{v} = [c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5\ c_6\ c_7\ i_8\ i_9\ i_{10}].$$

Structura matricei **H** este, conform relației (2.30), de forma:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I}_m\ \mathbf{Q}]$$

unde matricea $\mathbf{Q}$ are expresia:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Utilizînd relațiile (2.27) și (2.31) rezultă expresia matricei **G**:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matricele **H** și **G** determinate mai sus verifică relația (2.18).

2.7. *Se consideră un cod grup cu matricea de control de forma:*

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) *Să se determine proprietățile de corecție ale codului. Codul este perfect?*

b) *Să se stabilească dacă matricea:*

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

poate să fie matricea generatoare a codului.

c) *Să se scrie cuvintele de cod utilizînd matricele* **H** *și* **G**.

Soluție

a) Dimensiunile matricei **H** permit să se determine $n = 5$, $m = 3$ și deci $k = 2$. Cu acest cod se pot transmite patru simboluri și se poate corecta o eroare căci coloanele matricei **H** sînt distincte dar nu se pot corecta două erori căci suma oricăror două coloane ale matricei **H** nu este diferită de suma oricăror altor două coloane ale matricei **H**. De exemplu:

$$\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4.$$

Marginea Hamming care reprezintă condiția necesară pentru corecția a e erori este satisfăcută pentru $e = 1$ (v. rel. (2.12)):

$$2^m - 1 = 7 > n = 5.$$

Marginea Varșamov-Gilbert care reprezintă condiția suficientă pentru corecția a e erori este de asemenea satisfăcută pentru $e = 1$ (v. rel. (2.13)):

$$2^m = 8 \geqslant C_6^0 + C_6^1 = 1 + 6.$$

Codul nu este perfect deoarece se pot forma șapte corectori distincți, dintre care se utilizează pentru corecția unei erori numai cinci. Ceilalți doi corectori pot fi folosiți eventual pentru corectarea unor erori duble.

b) Dimensional matricea **G** îndeplinește condițiile de a fi matricea generatoare a codului determinat de matricea de control **H**. Pentru a fi într-adevăr

matricea generatoare a codului, este necesar și suficient să fie îndeplinită relația (2.18):

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{G}^T = 0;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 .$$

Deci matricea **G** este într-adevăr matricea generatoare a acestui cod.

c) Pentru a scrie cuvintele de cod cu ajutorul matricei de control **H** se utilizează relația (2.19), care, pentru un cuvînt de cod sistematic de forma:

$$\mathbf{v} = [c_1\ c_2\ c_3\ i_4\ i_5]$$

conduce la relațiile care dau simbolurile de control:

$$c_1 = i_4 + i_5;$$
$$c_2 = i_5;$$
$$c_3 = i_4,$$

rezultînd astfel un cuvînt de forma:

$$\mathbf{v} = [i_4 + i_5\ \ i_5\ \ i_4\ \ i_4\ \ i_5].$$

Cuvintele de cod se obțin calculînd cu relațiile de mai sus simbolurile de control pentru cele patru combinații posibile ale simbolurilor de informație. Cuvintele sînt date în tabelul 2.7.

TABELUL 2.7

Simboluri / Cuvinte	c_1	c_2	c_3	i_4	i_5
$\mathbf{v}_0$	0	0	0	0	0
$\mathbf{v}_1$	1	0	1	1	0
$\mathbf{v}_2$	1	1	0	0	1
$\mathbf{v}_3$	0	1	1	1	1

Se recunosc în cuvintele $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ liniile matricei **G**; $\mathbf{v}_3$ reprezintă suma liniilor matricei **G.**

○ **Notă.** Cuvintele de cod se pot scrie și utilizînd relația:

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{G},$$

unde **i** este o matrice linie compusă din simbolurile de informație; pentru acest caz **i** are expresia:

$$\mathbf{i} = [i_4\ i_5].$$

Prin înmulțire cu matricea generatoare **G** rezultă cuvinte de forma:

$$\mathbf{v} = [i_4 + i_5\ \ i_5\ \ i_4\ \ i_4\ \ i_5],$$

aceeași ca și în cazul utilizării relației (2.19).

2.8. *Se dă un cod grup sistematic ale cărui cuvinte de cod sînt* $\mathbf{v}_0 = [0000000]$, $\mathbf{v}_1 = [1111101]$, $\mathbf{v}_2 = [1111010]$ *și* $\mathbf{v}_3 = [0000111]$. *Se cere:*

a) *să se stabilească proprietățile de corecție ale acestui cod;*

b) *să se scrie o matrice* **H** *corespunzătoare acestui cod;*

c) *să se facă tabelul claselor alăturate și să se specifice corectorii aferenți;*

d) *să se stabilească în ce măsură scade probabilitatea recepției eronate dacă se utilizează acest cod. Se presupune că transmisia se face pe un canal binar simetric la care probabilitatea transmisiei eronate* $p = 0{,}1$.

Soluție

a) Avînd în vedere faptul că acest cod are $P_{min} = 3$, se pot corecta sigur toate erorile singulare. Numărul de cuvinte de cod fiind egal cu 4, rezultă $k = 2$; din inspectarea cuvintelor de cod rezultă structura lor: $\mathbf{v} = [c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5\ i_6\ i_7]$. Pentru acest cod $m = 5$. Numărul de corectori distincți care se pot forma este $2^m - 1 = 31$; se pot deci corecta erorile sindulare, rămînînd disponibili $31 - 7 = 24$ corectori, care pot fi utilizați pentru corectarea celor $C_7^2 = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ combinații de cîte două erori și pentru corectarea a trei combinații de cîte trei erori.

○ **Observație.** Nu este sigur însă că se pot corecta toate combinațiile de cîte două erori, ceea ce se va vedea din tabelul 2.8.

TABELUL 2.8

	Cuvinte eroare ε	*Cuvinte recepționate* $\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i + \varepsilon;\ i = 0, 1, 2, 3$			*Corectori* $\mathbf{z}^T = [\mathbf{H}\varepsilon^T]^T$
Cuvinte de cod $\mathbf{v}_i$	$\mathbf{v}_0 = 0000000$	$\mathbf{v}_1 = 1111101$	$\mathbf{v}_2 = 1111010$	$\mathbf{v}_3 = 0000111$	000 00
	1000000	0111101	0111010	1000111	10000
	0100000	1011101	1011010	0100111	01000
	0010000	1101101	1101010	0010111	00100
Erori simple	0001000	1110101	1110010	0001111	00010
	0000100	1111001	1111110	0000011	00001
	0000010	1111111	1111000	0000101	11110
	0000001	1111100	1111011	0000110	11111
	1100000	0011101	0011010	1100111	11000
	1010000	0101101	0101010	1010111	10100
	1001000	0110101	0110010	1001111	10010
	1000100	0111001	0111110	1000011	10001
	1000010	0111111	0111000	1000101	01110
	1000001	0111100	0111011	1000110	01111
	0110000	1001101	1001010	0110111	01100
	0101000	1010101	1010010	0101111	01010
	0100100	1011001	1011010	0100011	01001
	0100010	1011111	1011000	0100101	10110
Erori duble	0100001	1011100	1011011	0100110	10111
	0011000	1100101	1100010	0011111	00110
	0010100	1101001	1101110	0010011	00101
	0010010	1101111	1101000	0010101	11010
	0010001	1101100	1101011	0010110	11011
	0001100	1110001	1110110	0000011	00011
	0001010	1110111	1110000	0000101	11100
	0001001	1110100	1110011	0000110	11101
	0000110	1111011	1111100	0000001	11111
	0000101	1111000	1111111	0000010	11110
	0000011	1111110	1111010	0000100	00001
	0011100	1100001	1100110	0011011	00111
	0101100	1010001	1010110	0101011	01011
Erori triple	0110100	1001001	1001110	0110011	01101
	1010100	0101001	0101110	1010011	10101
	1100100	0011001	0011110	1100011	11001
	1001100	0110001	0110110	1001011	10011

b) Din inspectarea cuvintelor de cod se vede că relațiile între simbolurile de informație și cele de control sînt:

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = i_6 + i_7;\ c_5 = i_7$$

deci matricea **H** va avea forma:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Clasele alăturate clasei cuvintelor de cod $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ pentru cazul tuturor erorilor singulare, al tuturor erorilor duble și al cîtorva dintre combinațiile de erori triple sînt date în tabelul 2.8. În acest tabel se găsesc cele $2^7 = 128$ combinații distincte din spațiul $[W]$ în subspațiul $[V]$ intrînd $2^k = 2^2 = 4$ combinații, respectiv $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Pentru subspațiul $[V]$ se pot forma clasele alăturate ce conțin cuvintele $\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\varepsilon}$, unde $i = 0, 1, 2, 3$. Fiecare cuvînt eroare generează o clasă alăturată. Corectorii corespunzători fiecărui cuvînt eroare se pot calcula cu relația (2.21):

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}^T.$$

Din inspectarea tabelului 2.8 se constată că pentru erori singulare se obțin corectori distincți. Pentru corecția grupurilor de cîte două erori, corectorii sînt distincți cu excepția celor corespunzători cazurilor în care se eronează pozițiile 5 și 6, 5 și 7, 6 și 7. Corectorii respectivi sînt identici cu cei care rezultă în cazul în care se eronează pozițiile 7, 6 și 5, lucru de așteptat căci $\mathbf{h}_5 + \mathbf{h}_6 = \mathbf{h}_7$, $\mathbf{h}_5 + \mathbf{h}_7 = \mathbf{h}_6$ și $\mathbf{h}_6 + \mathbf{h}_7 = \mathbf{h}_5$. Va trebui să renunțăm la corectarea acestor din urmă trei combinații de erori duble, pentru a putea corecta toate erorile singulare. Acest cod va corecta, deci, toate cele șapte combinații de erori simple, $C_7^2 - 3 = 21 - 3 = 18$ combinații de erori duble și șase combinații de erori triple.

d) Probabilitatea erorii la codurile grup este dată de relația (2.24).

Pentru cazul de mai sus: $n_0 = 1$, $n_1 = 7$, $n_2 = 18$, $n_3 = 6$; cu $p = 0{,}1$ rezultă, după efectuarea calculelor:

$$p_e = 0{,}041.$$

Probabilitatea erorii, p_e, în cazul utilizării codului corector este de peste 20 de ori mai mică decît probabilitatea de eroare p în cazul transmisiei simple pe un canal binar simetric, deci prin utilizarea codului corector de erori crește stabilitatea la perturbații.

2.9. *Structurile din figurile* 2.9, a și 2.9, b *reprezintă circuite de multiplicare a polinoamelor. Se cere:*

a) *să se determine polinomul cu care se face multiplicarea;*

b) *se pot genera cuvinte de cod ciclic cu ajutorul acestor circuite? În ce mod?*

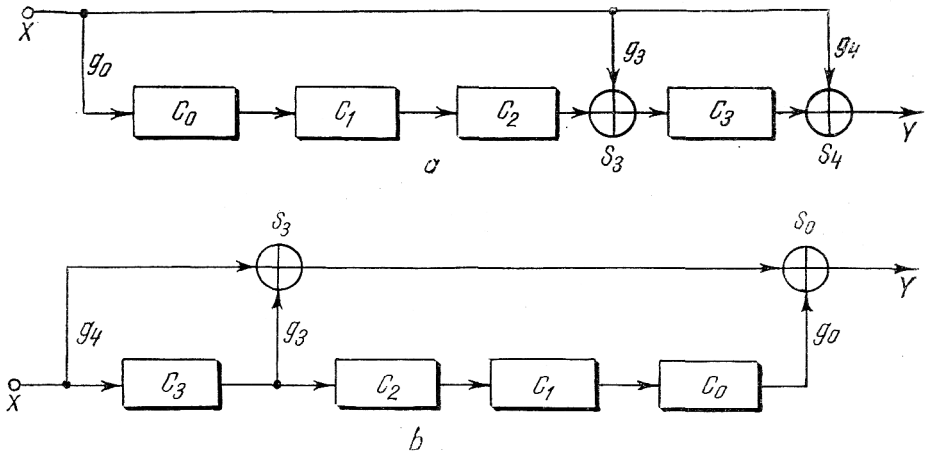


Fig. 2.9. Circuit de multiplicare cu polinomul $g(x) = x^4 + x^3 + 1$:
a — varianta cu sumatoare modulo doi între celulele bistabile; *b* — varianta cu registru de deplasare cu reacție logică prin sumatoare modulo doi.

Soluție

a) Polinomul cu care se face multiplicarea este pentru ambele cazuri $g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + g_4x^4 = x^4 + x^3 + 1$.

b) Se pot genera cuvinte de cod ciclic nesistematic dacă se consideră drept polinom de intrare $X(x)$ polinomul de informație $i(x)$, iar drept polinom generator al codului, polinomul $g(x) = x^4 + x^3 + 1$. Pentru acest caz, $m = 4$ și, dacă $e_c = 1$, atunci $n = 2^m - 1$. Polinomul $i(x)$ va fi un polinom de grad $k - 1 = n - m - 1 = 15 - 4 - 1 = 10$ și va fi de forma:

$$i(x) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 +$$
$$+ a_3x^3 + a_5x^2 + a_1x + a_0.$$

Se alege, de exemplu:

$$i(x) = x^9 + x^7 + x^4 + 1.$$

Secvența de intrare va fi:

$$[a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0] = [01010010001].$$

Polinomul de ieșire $Y(x) = i(x)\,g(x)$ fiind un multiplu al polinomului generator $g(x)$, poate reprezenta un cuvînt de cod ciclic nesistematic $\mathbf{v}(x)$ și deci:

$$\mathbf{v}(x) = i(x)\,g(x) = b_{14}x^{14} + \ldots + b_1x + b_0.$$

Pentru polinoamele $i(x)$ și $g(x)$ de mai sus rezultă:

$$\mathbf{v}(x) = x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^3 + 1.$$

Cuvîntul de cod corespunzător este:

$$\mathbf{v} = [100100001111110].$$

Se poate urmări în tabelul 2.9,*a* succesiunea de stări ale celulelor bistabile C_0, C_1, C_2, C_3 pentru circuitul din figura 2.9,*a* și în tabelul 2.9,*b* — succesiunea de stări ale celulelor C_3, C_2, C_1, C_0 pentru circuitul din figura 2.9,*b*. Se observă că operația de înmulțire se termină după $k - 1 + m + 1 = n$ tacte, cînd $\text{st}(C_0) = \text{st}(C_1) = \text{st}(C_2) = \text{st}(C_3) = 0$ (cu $\text{st}(C_i)$ s-a notat starea celulei i la tactul curent).

TABELUL 2.9, a

Tact	*Secvența de intrare X (x)*		*Stările celulelor*				*Secvența de ieșire Y(x)*	
	a_k	x^k	$\text{st}(C_3)$	$\text{st}(C_2)$	$\text{st}(C_1)$	$\text{st}(C_0)$	b_k	x^k
0			0	0	0	0		
1	0	x^{10}	0	0	0	0	0	x^{14}
2	1	x^9	1	0	0	1	1	x^{13}
3	0	x^8	0	1	0	0	1	x^{12}
4	1	x^7	1	0	1	1	1	x^{11}
5	0	x^6	0	1	0	1	1	x^{10}
6	0	x^5	0	0	1	0	1	x^9
7	1	x^4	1	0	0	0	1	x^8
8	0	x^3	0	1	0	0	0	x^7
9	0	x^2	0	0	1	0	0	x^6
10	0	x^1	0	0	0	1	0	x^5
11	1	x_0	1	0	0	1	0	x^4
12	0		0	1	0	0	1	x^3
13	0		0	0	1	0	0	x^2
14	0		0	0	0	1	0	x^1
15	0		0	0	0	0	1	x^0

Succesiunea de stări din tabelul 2.9,*a* s-a obținut utilizînd relațiile $\text{st}(C_0) = a_k$, $\text{st}(C_1) = \text{st}(C_0')$, $\text{st}(C_2) = \text{st}(C_1')$, $\text{st}(C_3) = \text{st}(C_2') + a_k$, $Y = b_k = \text{st}(C_3') + a_k$, unde s-a notat prin $\text{st}(C_0')$ starea celulei C_0 la tactul precedent.

TABELUL 2.9, b

Tact	Secvența de intrare $X(x)$		Stările celulelor				Secvența de ieșire $Y(x)$	
	a_k	x^k	st(C_3)	st(C_2)	st(C_1)	st(C_0)	b_k	x^k
0			0	0	0	0	0	
1	0	x^{10}	0	0	0	0	0	x^{14}
2	1	x^9	1	0	0	0	0	x^{13}
3	0	x^8	0	1	0	0	1	x^{12}
4	1	x^7	1	0	1	0	0	x^{11}
5	0	x^6	0	1	0	1	1	x^{10}
6	0	x^5	0	0	1	0	1	x^9
7	1	x^4	1	0	0	1	1	x^8
8	0	x^3	0	1	0	0	0	x^7
9	0	x^2	0	0	1	0	0	x^6
10	0	x^1	0	0	0	1	0	x^5
11	1	x^0	1	0	0	0	0	x^4
12	0		0	1	0	0	1	x^3
13	0		0	0	1	0	0	x^2
14	0		0	0	0	1	0	x^1
15	0		0	0	0	0	1	x^0

Stările succesive ale circuitului 2.9, *b* s-au determinat utilizînd relațiile: $st(C_3) = a_k$, $st(C_2) = st(C_3')$, $st(C_1) = st(C_2')$, $st(C_0) = st(C_1')$ și $b_k = a_k + st(C_3') + st(C_0')$.

2.10. *Structurile din figurile* 2.10,a *și* 2.10,b *reprezintă circuite de divizare a polinoamelor.*

a) *Să se determine polinomul prin care se face divizarea.*

b) *Să se determine succesiunea stărilor celulelor* C_0, C_1, C_2, C_3 *dacă la intrare se aplică o secvență dată.*

c) *Se pot folosi asemenea circuite pentru generarea cuvintelor de cod ciclic? În ce mod?*

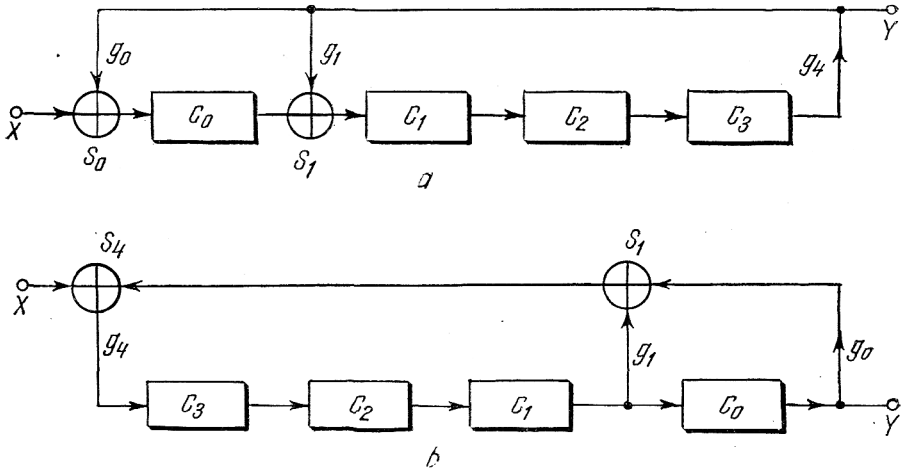


Fig. 2.10. Circuit de divizare prin polinomul $g(x) = x^4 + x^3 + 1$:
a — varianta cu sumatoare modulo doi între celulele bistabile;
b — varianta cu registru de deplasare cu reacție logică prin sumatoare modulo doi.

d) *Se poate stabili cu un asemenea circuit dacă o secvență de simboluri este un cuvînt de cod ciclic?*

Soluție

a) Polinomul cu care se face divizarea este, pentru ambele cazuri:

$$g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + g_4x^4 = x^4 + x + 1.$$

b) **Pentru circuitul din figura 2.10,** *a* se vor analiza două situații.

Pentru început se presupune că *la intrarea circuitului din figura* **2.10,***a se aplică un polinom* $x^{14} + x^{10} + x^8 + x^3 + x + 1$, care *reprezintă un cuvînt al codului ciclic generat de* g(x). Coeficienții acestui polinom sînt a'_k. Stările celulelor circuitului de divizare se notează cu $st(C'_1)$, $st(C'_2)$, $st(C'_3)$, $st(C'_4)$. Polinomul de ieșire are coeficienții b'_k. Evoluția circuitului în cursul procesului de divizare este dată în tabelul 2.10,*a*.

Cîtul împărțirii polinomului $X'(x)$ prin $g(x)$ este $Y'(x) = x^{10} + x^7 + x^3 + 1$. Restul aceleiași împărțiri este nul, ceea ce corespunde stărilor nule $st(C'_0)$, $st(C'_1)$, $st(C'_2)$, $st(C'_3)$ ale celulelor la sfîrșitul operației de împărțire prin $g(x)$.

Se va considera acum că *la intrarea circuitului din figura* **2.10,***a se aplică un polinom care nu este multiplu al lui* g(x), de exemplu: $X''(x) = x^{14} + x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x$. Coeficienții acestui polinom sînt a''_k și determină stările $st(C''_0)$, $st(C''_1)$, $st(C''_2)$, $st(C''_3)$ ale celulelor. Polinomul de ieșire are coeficienții b''_R. Succesiunea de stări se dă tot în tabelul 2.10,*a*. Se constată că polinomul cît este $Y''(x) = x^{10} + x^7 + x^3 + x^2$, iar polinomul rest este determinat de stările finale $st(C''_0)$, $st(C''_1)$, $st(C''_2)$ și $st(C''_3)$ ale celulelor cu relația:

$$r(x) = st(C''_0)x^0 + st(C''_1)x^1 + st(C''_2)x^2 + st(C''_3)x^3 = 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3.$$

Acest fapt poate fi verificat ușor efectuînd împărțirea polinomului $X(x)$ la $g(x)$ și determinînd cîtul și restul acestei împărțiri.

TABELUL 2.10, *a*

Tact	*Secvența de intrare* $X(x)$			*Stările celulelor*								*Secvența de ieșire* $Y(x)$		
0	a'_k	a''_k	x^k	st(C'_0)	st(C''_0)	st(C'_1)	st(C''_1)	st(C'_2)	st(C''_2)	st(C'_3)	st(C''_3)	b'_k	b''_k	x^k
0				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	x^{14}	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	x^{13}	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	x^{12}	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	
4	0	0	x^{11}	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	
5	1	1	x^{10}	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	x^{10}
6	0	0	x^9	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	x^9
7	1	1	x^8	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	x^8
8	0	0	x^7	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	x^7
9	0	1	x^6	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	x^6
10	0	0	x^5	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	x^5
11	0	1	x^4	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	x^4
12	1	1	x^3	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	x^3
13	0	0	x^2	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	x^2
14	1	1	x^1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	x^1
15	1	1	x^0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	x^0

Pentru circuitul din figura 2.10,*b* se consideră ca polinoame deîmpărțit tot polinoamele $X'(x)$ și $X''(x)$ de mai sus. Succesiunea corespunzătoare de stări se dă în tabelul 2.10,*b*, în care s-au utilizat aceleași notații ca și în tabelul 2.10,*a*.

Pentru polinomul deîmpărțit $X'(x)$ se obține același polinom cît $Y'(x) = x^{10} + x^7 + x^3 + 1$ și restul nul. Pentru polinomul deîmpărțit $X''(x)$ se obține polinomul cît $Y''(x) = x^{10} + x^7 + x^3 + x^2$, dar restul $r(x) = x^3 + x^2 + x$ nu mai poate fi determinat direct din stările celulelor C_3'', C_2'', C_1'', C_0'' deoarece stările finale ale celulelor reprezintă o formă modificată a restului.

c) Circuitele de divizare pot fi utilizate pentru generarea cuvintelor de cod ciclic sistematic. Un cuvînt de cod ciclic sistematic se obține utilizînd relația:

$$\mathbf{v}(x) = \frac{x^m i(x)}{g(x)} + rest\ (x).$$

Intrarea în circuitul de codare se face cu o întîrziere de m tacte față de intrarea în circuitul de divizare și, în decursul primelor k tacte cît se introduc simbolurile de informație, intrarea în codor coincide cu ieșirea. În timpul ultimelor m tacte se forțează introducerea unor zerouri în celule, astfel încît după n tacte stările celulelor codorului devin nule, ceea ce corespunde cu restul nul al împărțirii prin $g(x)$ a polinomului de ieșire. Secvența de ieșire este deci un cuvînt de cod ciclic care conține pe primele k poziții simbolurile de informație și pe ultimele m poziții simbolurile de control. Modificările suferite de un circuit de divizare pentru a deveni circuit de codare reies din figura 2.10,*c*. Comutatorul C este în timpul primelor k tacte pe poziția **1** și în timpul ultimelor m tacte pe poziția 2.

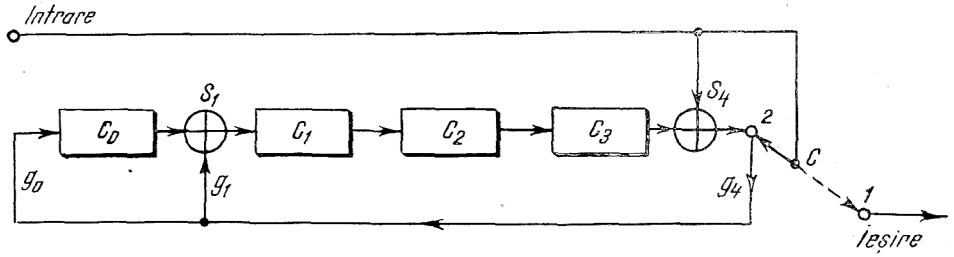


Fig. 2.10,*c*. Utilizarea circuitului de divizare prin polinomul $g(x)$ la codarea unui cod ciclic sistematic cu polinomul generator $g(x)$.

d) Pentru realizarea decodării, circuitele de divizare pot fi folosite ca atare, realizîndu-se divizarea polinomului de intrare care este cuvîntul recepționat $\mathbf{v}'(x)$ prin $g(x)$. Dacă la sfîrșitul celor n tacte starea decodorului este nulă, deci dacă $r(x) = 0$, $\mathbf{v}'(x)$ nu a fost afectat de erori. Dacă $r(x) \neq 0$ au apărut erori.

2.11. *Să se dă circuitul secvențial liniar cu* m *celule avînd polinomul* g(x) *primitiv reprezentat în figura 2.11,*a. *Circuitul lăsat să evolueze liber trece prin toate stările nenule posibile și generează ceea ce numește o „secvență pseudo-aleatoare"* SPA *de lungime* $n = 2^m - 1$. *Orice secvență este unic determinată*

TABELUL 2.10,*b*

Tact	*Secvența de intrare* $X(x)$			*Stările celulelor*								*Secvența de ieșire* $Y(x)$		
	a'_k	a''_k	x^k	$st(C'_3)$	$st(C''_3)$	$st(C'_2)$	$st(C''_2)$	$st(C'_1)$	$st(C''_1)$	$st(C'_0)$	$st(C''_0)$	b'_k	b''_k	z^k
0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	x^{14}	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	x^{13}	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	x^{12}	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	
4	0	0	x^{11}	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	
5	1	1	x^{10}	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	x^{10}
6	0	0	x^9	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	x^9
7	1	1	x^8	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	x^8
8	0	0	x^7	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	x^7
9	0	1	x^6	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	x^6
10	0	0	x^5	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	x^5
11	0	1	x^4	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	x^4
12	1	1	x^3	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	x^3
13	0	0	x^2	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	x^2
14	1	1	x^1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	x^1
15	1	0	x^0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	x^0

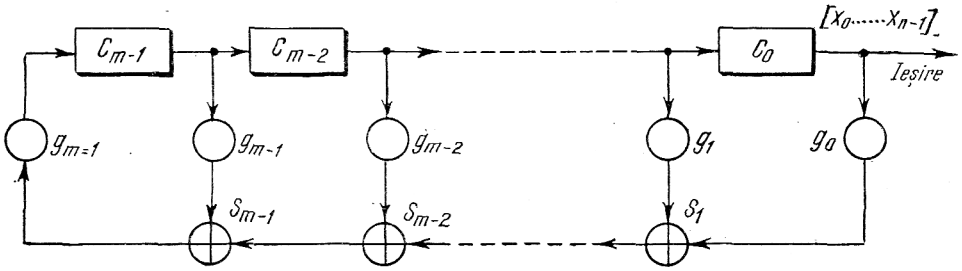


Fig. 2.11,*a*. Circuit secvențial liniar cu polinom caracteristic $g(x) = g_0 + g_1x + \ldots + g_mx^m$.

de primele m *simboluri, respectiv de starea inițială a registrului* (m — *tuplu inițial*). *Dacă se consideră secvența*:

$$x_0x_1 \ldots x_{m-1} \ldots x_{n-1},$$

în care simbolurile $x_0, x_1 \ldots x_{m-1}$ *constituie* m — *tuplu inițial, atunci pentru orice valoare* $m - 1 < u \leqslant n - 1$ *este îndeplinită relația*:

$$x_u = \bigoplus_{l=1}^{m} g_{m-l}x_{u-l}.$$

Să se demonstreze următoarele proprietăți ale SPA:

a) $SPA_i \oplus SPA_j = SPA_k$;

SPA_j *se obține din* SPA_i *prin* j — 1 *deplasări ciclice, iar* SPA_k *se obține din* SPA_i *prin* k — 1 *deplasări ciclice.*

b) *orice* SPA *de lungime maximală conține* $2^{m-1} - 1$ *simboluri 0 și* 2^{m-1} *simboluri 1.*

c) *Să se exemplifice aceste proprietăți pe secvența pseudoaleatoare generată de structura pentru care* $g(x) = x^3 + x + 1$ *(fig.* 2.11,b)

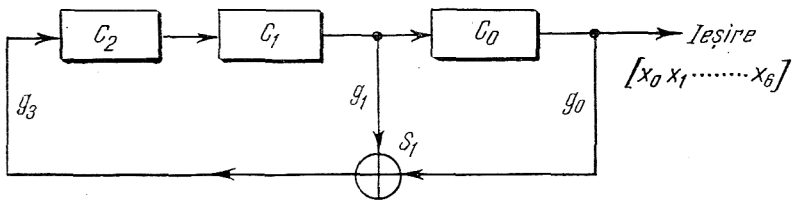


Fig. 2.11,*b*. Circuit secvențial liniar cu polinom caracteristic $g(x) = x^3 + x + 1$.

Soluție

a) Pentru SPA_i simbolul de rang u este:

$$x_u = \bigoplus_{l=1}^{m} g_{m-l}x_{u-l}, \text{ cu } m - 1 < u \leqslant n - 1.$$

Pentru SPA_j simbolul de rang u este:

$$y_u = \bigoplus_{l=1}^{m} g_{m-l}y_{u-l}, \text{ cu } m - 1 < u \leqslant n - 1.$$

Pentru SPA_k simbolul de rang u este:

$$z_u = x_u \oplus y_u = \bigoplus_{l=1}^{m} g_{m-l}(x_{u-l} \oplus y_{u-i}).$$

Deci, SPA_k are aceeași perioadă ca și SPA_i sau SPA_j și se generează după aceeași regulă, pornind însă de la alt m — tuplu inițial.

b) Din metoda de generare rezultă că într-o SPA se pot identifica toate m — tuplele corespunzătoare stărilor prin care trece registrul, deci toate combinațiile nenule de m simboluri. De aici rezultă că SPA conține un simbol 0 mai puțin decît simboluri 1: $n_1 = \frac{n+1}{2} = \frac{2^m - 1 + 1}{2} = 2^{m-1}$ este numărul de unități din SPA; $n_0 = \frac{n-1}{2} = \frac{2^m - 1 - 1}{2} = 2^{m-1} - 1$ este numărul de zerouri din SPA.

c) Structura registrului cu $g(x) = x^3 + x + 1$ este dată în figura 2.11,*b*.

Considerăm m — tuplul inițial: $\mathrm{st}(C_0) = x_0 = 1$; $\mathrm{st}(C_1) = x_1 = 0$; $\mathrm{st}(C_2) = x_2 = 0$. Cu ajutorul relației de recurență date se pot calcula celelalte simboluri ale secvenței, respectiv x_3, x_4, x_5, x_6:

$$x_3 = \bigoplus_{l=1}^{3} g_{3-l}x_{3-l} = g_2x_2 \oplus g_1x_1 \oplus g_0x_0 = 1;$$

$$x_4 = \bigoplus_{l=1}^{3} g_{3-l}x_{4-l} = g_2x_3 \oplus g_1x_2 \oplus g_0x_1 = 0;$$

$$x_5 = \bigoplus_{l=1}^{3} g_{3-l}x_{5-l} = g_2x_4 \oplus g_1x_3 \oplus g_0x_2 = 1;$$

$$x_6 = \bigoplus_{l=1}^{3} g_{3-l}x_{6-l} = g_2x_5 \oplus g_1x_4 \oplus g_0x_3 = 1.$$

○ **Observație.** Dacă în relația de recurență se face $u > n - 1$, se obțin simbolurile x_n, x_{n+1}, ... etc. care vor fi identice cu x_0, x_1, ... etc. De exemplu:

$$x_7 = \bigoplus_{l=1}^{3} g_{3-l}x_{7-l} = g_2x_6 \oplus g_1x_5 \oplus g_0x_4 = 1 \equiv x_0;$$

$$x_8 = \bigoplus_{l=1}^{3} g_{3-l}x_{8-l} = g_2x_7 \oplus g_1x_6 \oplus g_0x_5 = 0 \equiv x_1;$$

$$x_9 = \bigoplus_{l=1}^{3} g_{3-l}x_{9-l} = g_2x_8 \oplus g_1x_7 \oplus g_0x_6 = 0 \equiv x_2.$$

Deci, într-adevăr după $n = 2^m - 1$ simboluri, secvența obținută $SPA_i = [1001011]$ se repetă.

Din SPA_i se poate obține prin permutări ciclice SPA_j. De exemplu, prin trei permutări ciclice se obține secvența: $SPA_{j=4} = [0111001]$.

Însumînd modulo doi SPA_i cu SPA_j rezultă: $SPA_{k=6} = [1110010]$. Secvența [1110010] se obține tot după regula de recurență dată, avînd însă ca m-tuplu inițial $\mathrm{st}(C_2) = x_2 = 1$; $\mathrm{st}(C_1) = x_1 = 1$; $\mathrm{st}(C_0) = x_0 = 1$; ea este deci tot o SPA de aceeași perioadă ca și SPA_j sau SPA_i.

Se observă că pentru oricare dintre *SPA* de mai sus rezultă:

$$n_0 = 3 = \frac{2^3 - 1 - 1}{2} = \frac{8 - 2}{2} = 3;$$

$$n_1 = 4 = \frac{2^3 - 1 + 1}{2} = \frac{8}{2} = 4;$$

$$n = n_0 + n_1 = 2^m - 1 = 2^3 - 1 = 7.$$

2.12. *Un număr de 16 simboluri se transmit pe un canal cu perturbații utilizînd un cod ciclic corector de o eroare. Se cere:*

a) *să se determine numărul simbolurilor de informație* k, *al celor de control* m *și lungimea cuvîntului de cod* n;

b) *să se aleagă polinomul generator dintre polinoamele:* $x + 1$, $x^2 + 1$, $x^2 + x^2 + 1$, $x^4 + x^2 + x + 1$;

c) *să se scrie matricea generatoare* **G**;

d) *să se determine polinomul* p(x) *și polinomul de control* h(x);

e) *să se scrie matricea de control* **H**;

f) *să se scrie cuvintele de cod ciclic sistematic*;

g) *să se reprezinte schema codorului utilizînd registre de deplasare cu reacție și să se explice funcționarea circuitului*;

h) *să se determine matricea caracteristică a codorului*;

i) *să se determine evoluția stărilor registrului codor*;

j) *să se reprezinte schema decodorului*;

k) *să se determine evoluția stărilor registrului decodor pentru un cuvînt de cod ciclic*;

l) *să se determine evoluția stărilor registrului decodor pentru cazul în care în cuvîntul de cod de la punctul „k" este eronat simbolul* c_2.

Soluție

a) Dacă $N = 16$, din relația (2.11) ($2^k \geqslant N$) rezultă $k = 4$. Marginile Hamming și Varșamov-Gilbert (v. rel. (2.12) și (2.13)) dau:

$$2^m - 1 > n = m + k = m + 4,$$

respectiv:

$$2^m > 1 + n - 1 = n = m + 4.$$

Ambele margini dau aceeași valoare pentru numărul simbolurilor de control, $m = 3$, și rezultă: $n = m + k = 3 + 4 = 7$.

b) Polinomul generator al codului este un polinom de grad $m = 3$. Deci putem alege: $g(x) = x^3 + x^2 + 1$.

c) Cunoscînd polinomul generator, se poate scrie matricea generatoare **G** cu relația (2.38):

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \\ \mathbf{G}_4 \end{bmatrix}.$$

Matricea corespunde unui cuvînt de cod sistematic cu structura:

$$\mathbf{v} = [c_0 \; c_1 \; c_2 \; i_3 \; i_4 \; i_5 \; i_6].$$

d) Conform relațiilor (2.36) și (2.39), se obține $p(x) = x^7 + 1$ și $h(x) = x^4 + x^2 + x + 1$.

e) Cunoscînd polinomul de control, se poate determina matricea de control **H** folosind relația (2.40):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{h}_0\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2\mathbf{h}_3\mathbf{h}_4\mathbf{h}_5\mathbf{h}_6].$$

f) Cuvintele de cod au structura $\mathbf{v} = [c_0\, c_1\, c_2\, i_3\, i_4\, i_5\, i_6]$ sau $\mathbf{v}(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + i_3x^3 + i_4x^4 + i_5x^5 + i_6x^6$. Cuvintele de cod se pot scrie pornind fie de la matricea **G**, fie de la matricea **H**. Orice cuvînt de cod ciclic este o combinație liniară a liniilor matricei **G**:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{G}_1 + \alpha_2\mathbf{G}_2 + \alpha_3\mathbf{G}_3 + \alpha_4\mathbf{G}_4,$$

unde α_1, α_2, α_3 α_4 pot lua toate cele 16 combinații de valcri începînd cu 0000 și sfîrșind cu 1111. Se pot scrie, în acest fel, cuvintele de la $\mathbf{v}_0$ la $\mathbf{v}_{15}$. Ele se găsesc în tabelul 2.12,*a*.

TABELUL 2.12, *a*

Simboluri / *Cuvinte*	c_0	c_1	c_2	i_3	i_4	i_6	i_5	α_4	α_3	α_2	α_1
$\mathbf{v}_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{v}_1$	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
$\mathbf{v}_2$	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
$\mathbf{v}_3$	1	0	1	1	1	0	0	0	0		1
$\mathbf{v}_4$	0	0	1	1	0	1	0	0	1		0
$\mathbf{v}_5$	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
$\mathbf{v}_6$	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0
$\mathbf{v}_7$	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
$\mathbf{v}_8$	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
$\mathbf{v}_9$	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
$\mathbf{v}_{10}$	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
$\mathbf{v}_{11}$	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
$\mathbf{v}_{12}$	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
$\mathbf{v}_{13}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
$\mathbf{v}_{14}$	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\mathbf{v}_{15}$	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1

○ **Observație.** Se pot obține aceleași cuvinte de cod utilizînd relația (2.19), care conduce la sistemul:

$$c_2 = i_4 + i_5 + i_6;$$
$$c_1 = i_3 + i_4 + i_5;$$
$$c_0 = i_2 + i_3 + i_4 = i_3 + i_5 + i_6.$$

Alegînd pentru simbolurile de informație i_3, i_4, i_5, i_6 toate combinațiile posibile începînd cu 0000 și sfîrșind cu 1111 și utilizînd relațiile de mai sus se obțin tot cuvintele de cod din tabelul 2.12,*a*, dar în altă ordine.

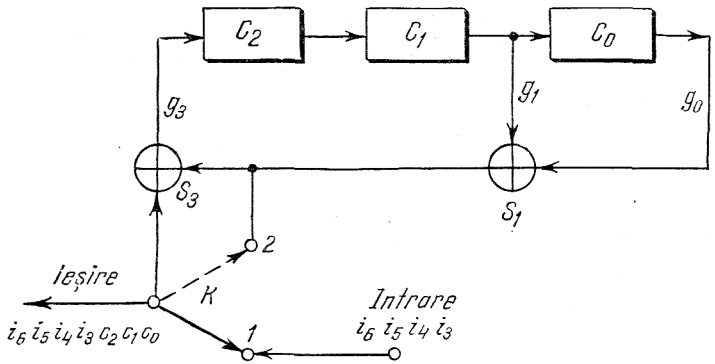


Fig. 2.12,*a*. Codorul pentru un cod ciclic corector de o eroare, cu polinom generator $g(x) = x^3 + x + 1$.

g) Schema codorului este reprezentată în fig. 2.12, *a*. Codorul este format din celule C_2, C_1, C_0 ale unui registru de deplasare, din sumatoarele S_1 și S_3 și din comutatorul K. Pe primele patru tacte comutatorul K este în poziția **1** și în registrul codor intră simbolurile i_6, i_5, i_4, i_3, care se succed în aceeași ordine și la ieșire. În decursul ultimelor trei tacte, în registrul codor se introduc zerouri, starea finală a celulelor registrului fiind 000. Pe ultimele trei tacte, la ieșire apar simbolurile de control c_2, c_1, c_0, corespunzînd ieșirii sumatorului $S_1 = \mathrm{st}(C_1) + \mathrm{st}(C_0)$. În tabelul 2.12,*b* se prezintă succesiunea stărilor registrului codor.

TABELUL 2.12, *b*

Tact	*K*	*Intrare*	st(C_2)	st (C_1)	st C_0	*Ieșire*
1	1	i_6	i_6	0	0	i_6
2	1	i_5	i_5	i_6	0	i_5
3	1	i_4	$i_4 + i_6$	i_5	i_6	i_4
4	1	i_3	$i_3+i_5+i_6$	$i_4 + i_6$	i_5	i_3
5	2	c_2	0	$i_3+i_5+i_6$	$i_4 + i_6$	$c_2=i_4+i_5+i_6$
6	2	c_1	0	0	$i_3 + i_5 + i_6$	$c_1=i_3+i_4+i_5$
7	2	c_0	0	0	0	$c_0=i_3+i_5+i_6$

h) Matricea caracteristică sau de tranziție este de forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ g_0 & g_1 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Polinomul $g(x)$ fiind ireductibil, perioada registrului este maximă; $n = 2^m - 1 = 7$.

i) Succesiunea de stări din tabelul 2.12,*b* poate fi regăsită utilizînd matricea **T**. Se notează cu $\mathbf{S}_i$ starea registrului la tactul i:

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \mathrm{st}_i(C_0) \\ \mathrm{st}_i(C_1) \\ \mathrm{st}_i(C_2) \end{bmatrix}.$$

Stările succesive ale registrului se pot determina cu relația de recurență:

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{i-1} + a_{n-i} \cdot \mathbf{U},$$

unde s-a notat:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Considerînd starea inițială $\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, se deduce pentru primele patru intervale de tact, cînd comutatorul K este pe poziția *1*, succesiunea de stări:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_6 \end{bmatrix} = i_6\mathbf{U};$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i_6 \\ i_5 \end{bmatrix} = i_5\mathbf{U} + i_6\mathbf{TU};$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} i_6 \\ i_5 \\ i_4 + i_6 \end{bmatrix} = i_4\mathbf{U} + i_5\mathbf{TU} + i_6\mathbf{T}^2\mathbf{U};$$

$$\mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} i_5 \\ i_4 + i_6 \\ i_6 + i_5 + i_3 \end{bmatrix} = i_3\mathbf{U} + i_4\mathbf{TU} + i_5\mathbf{T}^2\mathbf{U} + i_6\mathbf{T}^3\mathbf{U}.$$

În timpul ultimelor trei intervale de tact, cînd comutatorul K este pe poziția *2*, simbolurile de la intrarea în sumatorul S_3 sînt simbolurile de control, calculate de codor și accesibile la ieșirea sumatorului S_1. Se poate deci

considera că la intrarea codorului se aplică simbolurile de control și deci stările următoare se pot scrie:

$$\mathbf{S}_5 = \begin{bmatrix} i_4 + i_6 \\ i_6 + i_5 + i_3 \\ i_6 + i_5 + i_4 + c_2 \end{bmatrix} = c_2\mathbf{U} + i_3\mathbf{TU} + i_4\mathbf{T}^2\mathbf{U} + i_5\mathbf{T}^3\mathbf{U} + i_6\mathbf{T}^4\mathbf{U};$$

$$\mathbf{S}_6 = \begin{bmatrix} i_6 + i_5 + i_3 \\ i_6 + i_5 + i_4 + c_2 \\ i_3 + i_4 + i_5 + c_1 \end{bmatrix} = c_1\mathbf{U} + c_2\mathbf{TU} + i_3\mathbf{T}^2\mathbf{U} + i_4\mathbf{T}^3\mathbf{U} + i_5\mathbf{T}^4\mathbf{U} + i_6\mathbf{T}^5\mathbf{U};$$

$$\mathbf{S}_7 = \begin{bmatrix} i_6 + i_5 + i_4 + c_2 \\ i_3 + i_4 + i_5 + c_1 \\ i_3 + i_5 + i_6 + c_0 \end{bmatrix} = c_0\mathbf{U} + c_1\mathbf{TU} + c_2\mathbf{T}^2\mathbf{U} + i_3\mathbf{T}^3\mathbf{U} + i_4\mathbf{T}^4\mathbf{U} + i_5\mathbf{T}^5\mathbf{U} + i_6\mathbf{T}^6\mathbf{U}.$$

○ **Observații.** 1) Avînd în vedere că după șapte tacte stările celulelor C_2, C_1, C_0 sînt nule, se pot determina simbolurile de control cu relația:

$$\mathbf{S}_7 = \begin{bmatrix} i_6 + i_5 + i_4 + c_2 \\ i_3 + i_4 + i_5 + c_1 \\ i_3 + i_5 + i_6 + c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

care conduce la sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} c_2 = i_6 + i_5 + i_4; \\ c_1 = i_3 + i_4 + i_5; \\ c_0 = i_3 + i_5 + i_6. \end{cases}$$

2) Este de asemenea de semnalat posibilitatea de a scrie relația $\mathbf{S}_7 = 0$ sub forma:

$$\mathbf{S}_7 = \mathbf{H}\mathbf{v}^T = 0,$$

dacă se face notația:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{U}\ \mathbf{TU}\ \mathbf{T}^2\mathbf{U}\ \mathbf{T}^3\mathbf{U}\ \mathbf{T}^4\mathbf{U}\ \mathbf{T}^5\mathbf{U}\ \mathbf{T}^6\mathbf{U}].$$

j) Schema decodorului este dată în figura 2.12,*b*. Decodorul este format din registrul principal cu șapte celule, registrele DEC_1 și DEC_2 și un comutator C. Cuvîntul recepționat $\mathbf{v}'$ este introdus în DEC_1 cînd comutatorul C este pe poziția *1* și în DEC_2 cînd comutatorul C este pe poziția *2*; DEC_1 va asigura astfel corecția cuvintelor impare, iar DEC_2 — pe cea a cuvintelor pare. Semnalul de corecție se obține la ieșirile circuitelor SI_1 și SI_2 și se aplică celulei M_0 prin circuitul SAU.

k) Se presupune că decodorul recepționează un cuvînt $\mathbf{v}'$. În primele șapte tacte, simbolurile cuvîntului sînt introduse în DEC_1. În următoarele șapte tacte, DEC_1 determină poziția eronată. În cazul în care cuvîntul recepționat este corect, la sfîrșitul primelor șapte tacte celulele DEC_1 vor ajunge în starea 0. Succesiunea de stări a registrului în acest caz este dată în tabelul 2.12,*c*.

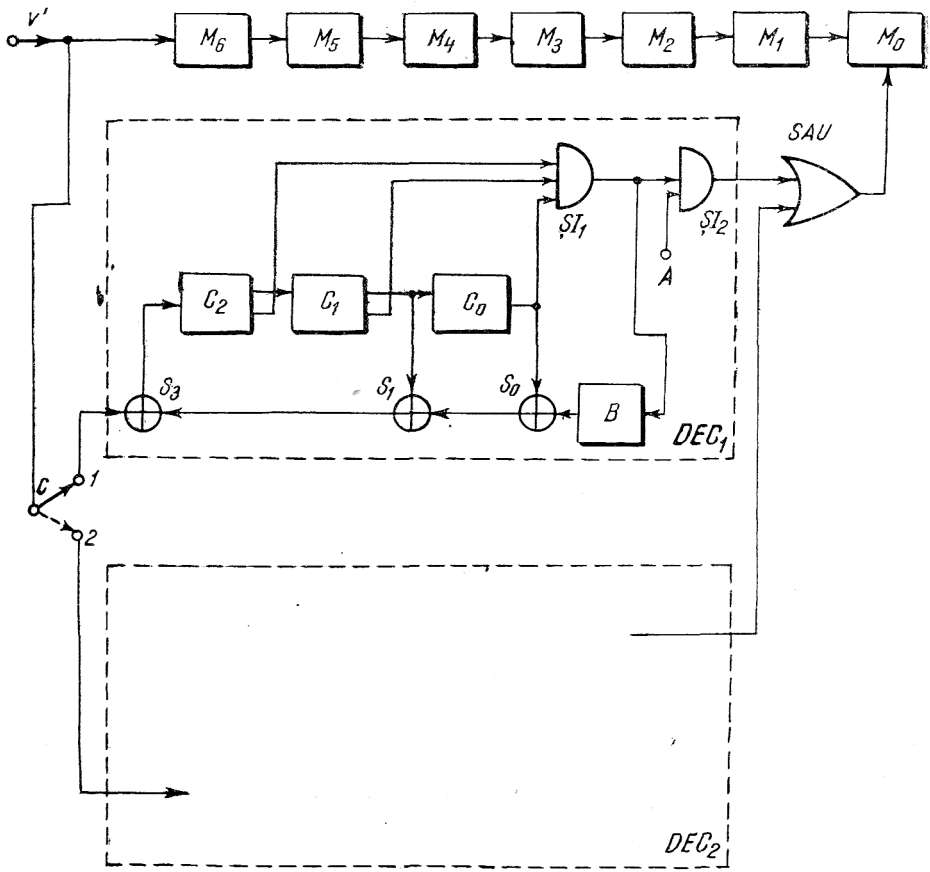


Fig. 2.12,*b*. Decodorul pentru un **cod ciclic corector de** o eroare cu polinom generator $g(x) = = x^3 + x + 1$.

TABELUL 2.12, c

Tact	*Poziția* C	*Intrare*	st (C_2)	st (C_1)	st (C_0)
0			0	0	0
1	1	i_6	i_6	0	0
2	1	i_5	i_5	i_6	0
3	1	i_4	$i_4 + i_6$	i_5	i_6
4	1	i_3	$i_3 + i_5 + i_6$	$i_4 + i_6$	i_5
5	1	c_2	$c_2+i_4+i_5+i_6=0$	$i_3+i_5+i_6$	$i_4 + i_6$
6	1	c_1	$c_1+i_3+i_4+i_5=0$	0	$i_3+i_5+i_6$
7	1	c_0	$c_0+i_3+i_5+i_6=0$	0	0

○ **Observații.** *1)* La același rezultat se putea ajunge utilizînd matricea caracteristică **T**:

$$\mathbf{S}_1 = i_6\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_6 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_2 = i_5\mathbf{U} + \mathbf{TS}_1 = i_5\mathbf{U} + i_6\mathbf{TU} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_3 = i_4\mathbf{U} + \mathbf{TS}_2 = i_4\mathbf{U} + i_5\mathbf{TU} + i_6\mathbf{T}^2\mathbf{U} = \begin{bmatrix} i_6 \\ i_5 \\ i_4 + i_6 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_4 = i_3\mathbf{U} + \mathbf{TS}_3 = i_3\mathbf{U} + i_4\mathbf{TU} + i_5\mathbf{T}^2\mathbf{U} + i_6\mathbf{T}^3\mathbf{U} = \begin{bmatrix} i_5 \\ i_4 + i_6 \\ i_3 + i_5 + i_6 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_5 = c_2\mathbf{U} + \mathbf{TS}_4 = c_2\mathbf{U} + i_3\mathbf{TU} + i_4\mathbf{T}^2\mathbf{U} + i_5\mathbf{T}^3\mathbf{U} + i_6\mathbf{T}^4\mathbf{U} = \begin{bmatrix} i_4 + i_6 \\ i_3 + i_5 + i_6; \\ c_2 + i_4 + i_5 + i_6 = 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_6 = c_1\mathbf{U} + \mathbf{TS}_5 = c_1\mathbf{U} + c_2\mathbf{TU} + i_3\mathbf{T}^2\mathbf{U} + i_4\mathbf{T}^3\mathbf{U} + i_5\mathbf{T}^4\mathbf{U} + t_6\mathbf{T}^5\mathbf{U} = \begin{bmatrix} i_3 + i_5 + i_6 \\ 0 \\ c_1 + i_3 + i_4 + i_5 = 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_7 = c_0\mathbf{U} + \mathbf{TS}_6 = c_0\mathbf{U} + c_1\mathbf{TU} + c_2\mathbf{T}^2\mathbf{U} + i_3\mathbf{T}^3\mathbf{U} + i_4\mathbf{T}^4\mathbf{U} + i_5\mathbf{T}^5\mathbf{U} + i_6\mathbf{T}^6\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_0 + i_3 + i_5 + i_6 = 0 \end{bmatrix}.$$

2) Se poate arăta că, într-adevăr, matricea **H** determinată la punctul e) este aceeași cu matricea **H** dată de relația:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{U}\ \mathbf{TU}\ \mathbf{T}^2\mathbf{U}\ \mathbf{T}^3\mathbf{U}\ \mathbf{T}^4\mathbf{U}\ \mathbf{T}^5\mathbf{U}\ \mathbf{T}^6\mathbf{U}].$$

Pentru aceasta se calculează fiecare element al matricei **H** și rezultă:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{h}_0;$$

$$\mathbf{TU} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{h}_1;$$

$$\mathbf{T}^2\mathbf{U} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{TU} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{h}_2;$$

$$\mathbf{T}^3\mathbf{U} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^2\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{h}_3;$$

$$\mathbf{T^4U} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T^3U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{h}_4$$

$$\mathbf{T^5U} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T^4U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{h}_5;$$

$$\mathbf{T^6U} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T^5U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{h}_6.$$

l) Dacă este eronat simbolul c_2, cuvîntul de cod recepționat este de forma $\mathbf{v}' = [c_0\ c_1\ c_2'\ i_3\ i_4\ i_5\ i_6]$. Pînă la introducerea simbolului eronat c_2', succesiunea de stări a registrului DEC_1 este aceeași ca în cazul recepționării unui cuvînt corect respectiv:

$$\mathbf{S}_1 = i_6\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_6 \end{bmatrix};$$

$$S_2 = i_5\mathbf{U} + T\mathbf{S}_1 = i_5\mathbf{U} + i_6\mathbf{TU} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_6 \\ i_5 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_3 = i_4\mathbf{U} + \mathbf{TS}_2 = i_4\mathbf{U} + i_5\mathbf{TU} + i_6\mathbf{T^2U} = \begin{bmatrix} i_6 \\ i_5 \\ i_6 + i_4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_4 = i_3\mathbf{U} + \mathbf{TS}_3 = i_3\mathbf{U} + i_4\mathbf{TU} + i_5\mathbf{T^2U} + i_6\mathbf{T^3U} = \begin{bmatrix} i_5 \\ i_4 + i_6 \\ i_3 + i_5 + i_6 \end{bmatrix}.$$

Stările care apar după introducerea simbolului eronat sînt:

$$\mathbf{S}_5 = c_2'\mathbf{U} + \mathbf{TS}_4 = (c_2 + 1)\mathbf{U} + \mathbf{TS}_4 = \mathbf{U} + c_2\mathbf{U} + \mathbf{TS}_4 =$$

$$= \mathbf{U} + c_2\mathbf{U} + i_3\mathbf{TU} + i_4\mathbf{T^2U} + i_5\mathbf{T^3U} + i_6\mathbf{T^4U} = \begin{bmatrix} i_4 + i_6 \\ i_3 + i_5 + i_6 \\ c_2 + i_4 + i_5 + i_6 + 1 = 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_6 = c_1\mathbf{U} + \mathbf{TS}_5 = \mathbf{TU} + c_1\mathbf{U} + c_2\mathbf{TU} + i_3\mathbf{T^2U} + i_4\mathbf{T^3U} + i_5\mathbf{T^4U} + i_6\mathbf{T^5U} =$$

$$= \begin{bmatrix} i_3 + i_5 + i_6 \\ 1 \\ c_1 + i_3 + i_4 + i_5 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_7 = c_0\mathbf{U} + \mathbf{TS}_6 = \mathbf{T^2U} + c_0\mathbf{U} + c_1\mathbf{TU} + c_2\mathbf{T^2U} + i_3\mathbf{T^3U} + i_4\mathbf{T^4U} + i_5\mathbf{T^5U} + i_6\mathbf{T^6U} =$$

$$= \mathbf{T^2U} = \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

După aceste prime șapte tacte, în registrul principal de șapte celule a intrat cuvîntul de cod v', iar decodorul DEC_1 a ajuns în starea $\mathbf{S}_7 = \mathbf{T}^2\mathbf{U} \neq 0$. Din acest moment, decodorul DEC_1 determină poziția eronată, iar din registrul principal ies succesiv simbolurile cuvîntului de cod.

La tactul 8 decodorul DEC_1 ia starea;

$$\mathbf{S}_8 = \mathbf{TS}_7 = \mathbf{T}^3\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

iar din M_0 iese i_6; $\mathrm{st}(M_0) = i_5$.

În continuare se obțin succesiv stările:

$$\mathbf{S}_9 = \mathbf{TS}_8 = \mathbf{T}^4\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

iar din M_0 iese i_5; $\mathrm{st}(M_0) = i_4$;

$$\mathbf{S}_{10} = \mathbf{TS}_9 = \mathbf{T}^5\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

iar din M_0 iese i_4; $\mathrm{st}(M_0) = i_3$;

$$\mathbf{S}_{11} = \mathbf{TS}_{10} = \mathbf{T}^6\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

iar din M_0 iese i_3; $\mathrm{st}(M_0) = c_2'$.

Avînd în vedere că perioada maximă a registrului este 7, $\mathbf{T}^7 = \mathbf{I}$, unde $\mathbf{I}$ este matricea unitate și deci $\mathbf{T}^6\mathbf{U} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}$.

Deci, cînd simbolul eronat se află în M_0, registrul trece prin starea fixă:

$$\mathbf{S}_{11} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Această stare este recunoscută de circuitul $ȘI_1$, care formează impulsul de corecție aplicat celulei M_0 prin circuitul SAU. Impulsul de corecție este, de asemenea, folosit pentru aducerea la 0 a celulei C_0 a registrului DEC_1 prin bistabilul B. Circuitul $ȘI_2$ inhibă formarea impulsului de corecție dacă în decursul primelor șapte tacte a apărut starea $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}$.

2.13. *Se consideră două registre decodificatoare pentru un cod ciclic corector de o eroare cu* $k = 1$, $m = 3$, $n = 7$ *și* $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ *avînd structurile din figurile 2.13,a și 2.13,b. Se cere:*

a) *să se scrie matricele caracteristice* $\mathbf{T}$ *și* τ *corespunzătoare celor două structuri;*

b) *să se determine matricele de control* $\mathbf{H}$ *și* $\mathbf{H}'$ *corespunzătoare celor două structuri;*

c) *să se precizeze corectorul corespunzător cuvîntului eronat pe o poziție* $\mathbf{v}' = [1110111]$ *pentru cele două cazuri.*

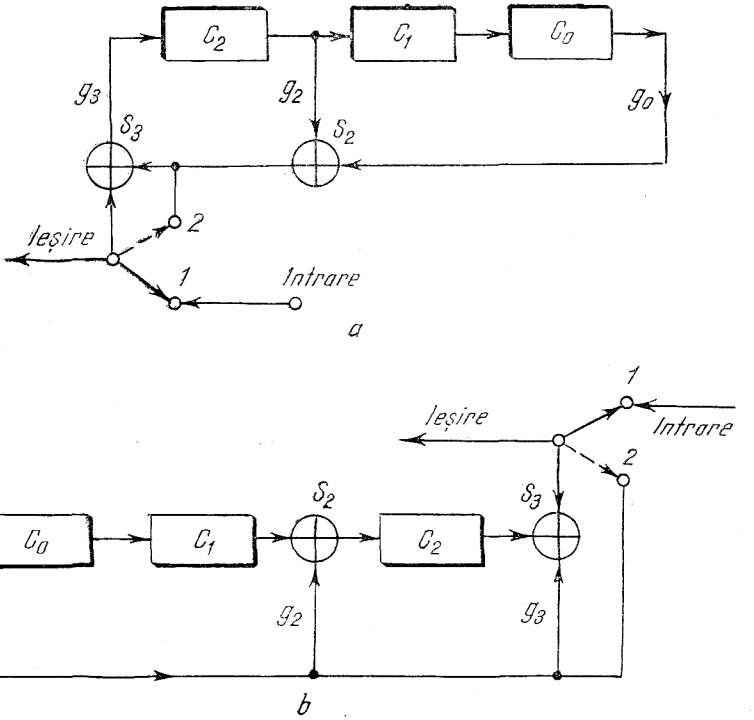


Fig. 2.13. Circuit de decodificare pentru un cod ciclic corector de o eroare cu $g(x) = x^3 + x^2 + 1$: *a* — varianta cu registru de deplasare cu reacție logică prin sumatoare modulo doi; *b* — varianta cu sumatoare modulo doi între celule bistabile.

Soluție

a) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ g_0 & g_1 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\tau = \begin{bmatrix} g_2 & 1 & 0 \\ g_1 & 0 & 1 \\ g_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Matricea **H** corespunzătoare structurii din figura 2.13,*a* este:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{U}\ \mathbf{TU}\ \mathbf{T^2U}\ \mathbf{T^3U}\ \mathbf{T^4U}\ \mathbf{T^5U}\ \mathbf{T^6U}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricea **H'** corespunzătoare structurii din figura 2.13,*b* este:

$$\mathbf{H'} = [\mathbf{U}\ \tau\mathbf{U}\ \tau^2\mathbf{U}\ \tau^3\mathbf{U}\ \tau^4\mathbf{U}\ \tau^5\mathbf{U}\ \tau^6\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

○ **Se poate observa că** cele două matrice diferă numai prin ordinea în care sînt scrise coloanele, codurile construite cu cele două matrice avînd aceleași proprietăți corectoare.

c) Conform relației (2.34) se obțin crectorii $\mathbf{z} = \mathbf{H}(\mathbf{v'})^T = \mathbf{h}_4$ și $\mathbf{z'} = \mathbf{H'}(\mathbf{v'})^T = \mathbf{h}'_4$. Este deci eronată poziția a 4-a din cuvîntul de cod, respectiv i_3.

Cuvîntul de cod corect este: $\mathbf{v} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$. Se vede că, cu corectori diferiți, în cele două cazuri, se ia aceeași decizie cu privire la poziția eronată, ceea ce înseamnă că din punctul de vedere al corecției erorilor cele două structuri sînt echivalente.

○ **Este de remarcat că,** în timp ce corectorul **z** reprezintă o formă modificată a restului împărțirii lui $\mathbf{v}'(x)$ prin $g(x)$, $\mathbf{z}'$ reprezintă chiar acest rest. Într-adevăr, se obține:

$$\frac{\mathbf{v}'(x)}{g(x)} = \frac{x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + 1} = x^3 + x + \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 + 1}.$$

Restul împărțirii este $x^2 + 1$, ceea ce corespunde corectorului $\mathbf{z}'$.

2.14. *Fie un cod ciclic corector de o eroare care are vectorii liniar independenți [0110100], [0001101], [0011010], [1101000]. Se cere:*

a) *polinomul generator* g(x) *și matricea generatoare* **G**;

b) *matricea de control;*

c) *să se spună dacă [1101101] este sau nu cuvînt de cod; dacă nu este, să se indice cuvîntul corect din care provine prin eronarea unui simbol.*

Soluție

a) Cei patru vectori liniari independenți constituie cele patru linii ale matricei **G**, care este de forma (v. rel. (2.35)):

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix}.$$

Se identifică prima linie a matricei **G** ca al patrulea vector dat, *1101000*, și rezultă $g_0 = g_1 = g_3 = 1$, $g_2 = 0$, adică $g(x) = x^3 + x + 1$. Matricea generatoare a codului va fi:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Pentru codul dat, $n = 7$, $k = 4$, $m = 3$, deci $p(x) = x^7 + 1$ și $h(x) = p(x)/g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$.

Expresia matricei **H** este următoarea (v. rel. (2.40)):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Dacă corectorul $\mathbf{z} = \mathbf{h}_i \neq 0$, atunci este eronată poziția i din cuvîntul dat; aplicînd relația (2.21) rezultă că este eronată poziția a patra:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}(\mathbf{v}')^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{h}_4.$$

Se obține cuvîntul eroare $\boldsymbol{\varepsilon} = [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ și cuvîntul corect $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\varepsilon} = [1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1] + [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0] = [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1]$.

2.15. *Efectele zgomotului de impulsuri într-o transmisiune digitală pot fi diminuate folosind un sistem cu acumulare discretă. Cuvîntul de transmis, compus numai din simboluri de informație, se repetă de un număr* b *de ori. Dacă în decursul transmisiei fiecare dintre simbolurile cuvîntului nu a fost eronat de mai mult de* d *ori, recepția acestuia se poate face corect. Considerînd ca model al canalului afectat de zgomot un canal binar simetric cu probabilitate de transmisie eronată* p *se cere:*

a) *să se determine pragul optim* d *în funcție de numărul de repetări* b:

b) *pentru* b = 5 *să se determine efectele unui asemenea sistem asupra probabilității de recepție eronată.*

Soluție

a) Deoarece se pune problema realizării de d ori a unui eveniment din b încercări, se poate considera probabilitatea de recepție eronată pentru cazul transmisiunii simbolului 0 ca avînd o distribuție binominală, respectiv:

$$P_{01}(b, d) = \sum_{i=d}^{b} C_b^i p^i (1 - p)^{b-i}.$$

Din considerente similare, probabilitatea recepției corecte în cazul transmisiunii simbolului 1 este:

$$P_{11}(b, d) = \sum_{i=d}^{b} C_b^i (1 - p)^i p^{b-i}.$$

Probabilitatea recepției eronate în cazul transmisiunii simbolului 1 este:

$$P_{10}(b, d) = 1 - P_{11}(b,d) = 1 - \sum_{i=d}^{b} C_b^i (1 - p)^i p^{b-i}.$$

Utilizînd expresia probabilității complete, se poate determina probabilitatea recepției false:

$$P_f(b, d) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} P(x_i)\ P(y_j/x_i) \text{ pentru } i \neq j,$$

unde $P(x_1) = P(x_2) = \frac{1}{2}$ reprezintă probabilitatea apriori de transmisiune a simbolului x_1, respectiv x_2. Deoarece:

$$P(y_1/x_2) = P_{10}(b, d);\ P(y_1/x_1) = P_{00}(b, d);$$
$$P(y_2/x_1) = P_{01}(b, d);\ P(y_2/x_2) = P_{11}(b, d),$$

rezultă:

$$P_f(b,d) = P(x_1)\,P(y_2/x_1) + P(x_2)\,P(y_1/x_2) =$$

$$= P(0)\,P_{01}(b,d) + P(1)\,P_{10}(b,d) = \frac{1}{2}[P_{10}(b,d) + P_{01}(b,d)];$$

$$P_f(b,d) = \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{i=d}^{b} C_b^i (1-p)^i p^{b-i} + \sum_{i=d}^{b} C_b^i p^i (1-p)^{b-i}\right].$$

Folosind expresia posibilității recepției false, rezultă pentru probabilitatea recepției corecte $P_c(b,d)$:

$$P_c(b,d) = 1 - P_f(b,d) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=d}^{b} C_b^i (1-p)^i p^{b-i} - \frac{1}{2}\sum_{i=d}^{b} C_b^i p^i (1-p)^{b-i}$$

Ultimele două expresii pentru $P_f(b,d)$ și $P_c(b,d)$ se pot scrie sub forma:

$$P_f(b,d) = \frac{1}{2}\left\{1 - \sum_{i=d}^{b} C_b^i [(1-p)^i p^{b-i} - p^i (1-p)^{b-i}]\right\}$$

$$P_c(b,d) = \frac{1}{2}\left\{1 + \sum_{i=d}^{b} C_b^i [(1-p)^i p^{b-i} - p^i (1-p)^{b-i}]\right\}$$

Pentru valoarea optimă d a pragului, probabilitatea recepției eronate $P_f(b,d)$ trebuie să fie minimă, respectiv:

$$P_f(b,d-1) \geqslant P_f(b,d),$$

$$P_f(b,d+1) \geqslant P_f(b,d).$$

Prima inegalitate se mai poate scrie:

$$\frac{1}{2}\left\{1 - \sum_{i=d-1}^{b} C_b^i [(1-p)^i p^{b-i} - p^i (1-p)^{b-i}]\right\} \geqslant \frac{1}{2}\left\{1 - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=d}^{b} C_b^i [(1-p)^i p^{b-i} - p^i (1-p)^{b-i}]\right\}$$

respectiv:

$$\sum_{i=d-1}^{b} C_b^i [(1-p)^i p^{b-i} - p^i (1-p)^{b-i}] \leqslant \sum_{i=d}^{b} C_b^i [(1-p)^i p^{b-i} - p^i (1-p)^{b-i}],$$

sau

$$C_b^{d-1}[(1-p)^{d-1} p^{b-d+1} - p^{d-1}(1-p)^{b-d+1}] \leqslant 0.$$

Avînd în vedere că C_b^{d-1} este singur un număr pozitiv, trebuie ca:

$$(1-p)^{d-1} p^{b-d+1} - p^{d-1}(1-p)^{b-d+1} \leqslant 0$$

sau:

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^{d-1} \leqslant \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b-d+1}$$

Dar $1-p/p > 1$, și deci $d-1 \leqslant b-d+1$, astfel încît rezultă $d \leqslant b/2+1$. Prelucrînd a doua inegalitate într-o manieră similară, se obține $d \geqslant b/2$.

Considerînd valoarea optimă a lui d ca fiind media aritmetică a celor două valori extreme, rezultă:

$$d = \frac{b/2 + 1 + b/2}{2} = \frac{b + 1}{2}.$$

Dacă numărul de repetări b este par, se alege $d = b/2$.

b) Pentru $b = 5$, valoarea optimă a lui d rezultă $d = b + 1/2 = 3$. Utilizînd relația ce dă probabilitatea recepției false și înlocuind $b = 5$ și $d = 3$, se determină:

$$P_f(5, 3) = \frac{1}{2}\left\{1 - \sum_{i=3}^{5} C_5^i [(1-p)^i p^{5-i} - p^i (1-p)^{5-i}]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{1 - C_5^3[(1-p)^3 p^2 - p^3(1-p)^2] - C_5^4[(1-p)^4 p - p^4(1-p)] -$$

$$- C_5^5[(1-p)^5 - p^5]\} = \frac{1}{2}\{1 - 10[0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2 - 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^2] -$$

$$- 5[0{,}9^4 \cdot 0{,}1 - 0{,}1^4 \cdot 0{,}9] - [0{,}9^5 - 0{,}1^5]\} = 0{,}00135.$$

Se observă că dacă nu se folosește un asemenea sistem probabilitatea recepției eronate este $p = 0{,}1$, iar dacă se folosește un sistem cu $b = 5$ repetări și prag de decizie $d = 3$ se obține o îmbunătățire substanțială, probabilitatea $P_f(5,3)$ a recepției eronate scăzînd la valoarea $P_f = 0{,}00135$, adică de circa 75 ori.

2.16. *O posibilitate de realizare simplă a unui cod corector de erori singulare este de a transmite cuvîntul de cod urmat de cuvîntul inversat. La recepție se însumează modulo doi cele două secvențe, rezultînd un cuvînt format numai din unități dacă nu au apărut erori. Dacă în procesul de transmisiune apare o eroare, pe poziția eronată simbolul transmis coincide cu cel inversat și, în sumă, pe poziția respectivă va apărea un zero, care localizează eroarea. Utilizînd acest principiu, să se determine eroarea în următoarele combinații: 11001001110, 101100000011, 100000011111, 110001011110, 111100000011.*

Soluție

Localizăm secvența informațională și secvența inversată (corectoare) pe combinațiile recepționate:

110001	001110
101100	000011
100000	011111
110001	011110
111100	000011

Însumăm modulo doi secvența informațională cu cea inversată. Obținem:

110001	10110	100000	110001	111100
001110	000011	011111	011110	000011
111111	101111	111111	101111	111111

Au apărut erori în secvența a 2-a pe poziția a 2-a și în secvența a 4-a tot pe poziția a 2-a. Secvențele a 2-a și a 4-a corecte sînt, respectiv, 111100 și 100001.

2.17. *În transmisiuni telex se folosește un cod în care cuvintele de cod sînt de lungime 7 și au trei unități și patru zerouri. Cuvintele acestui cod sînt date în tabelul 2.17.*

TABELUL 2.17

Combinația	*Semnificația combinației*		*Combinația*	*Semnificația combinației*	
	Registrul „jos"	*Registrul „sus"*		*Registrul „jos"*	*Registrul „sus"*
0011010	A	—	1100100	R	3
0011001	B	?	0101010	S	Apostrof
1001100	C	:	1000101	T	5
0011100	D	Cine este?	0110010	U	7
0111000	E	∪	1001001	V	=
0010011	F	%	0100101	W	2
1100001	G	Spațiu între cuvinte	0010110	X	/
1010010	H	8	0010101	Y	6
1110000	I	Sonerie	0110001	Z	+
0100011	J	(	1011000	Întoarcerea carului	
0001011	K	)	0001110	Început de rînd	
1100010	L	.	0100110	Litere	
1010001	M	,	1101000	Cifre	
1010100	N	9	0000111	Apel	
1100110	O	0	0110100	Hîrtie neperforată	
1001010	P	1	0101001	Rechemare	
0001101	Q	4	0101100	α	
			1000011	β	

a) *Ce proprietăți de corecție are acest cod?*

b) *Găsiți eroarea în următoarea secvență: 00110100001010100010100110100 11000111100001100001001101010011010111000101000111000011001110011001 01100100001010100110010110010011111000.*

Soluție

a) Fiind un cod cu ponderea minimă 3, poate corecta o eroare apărută în fiecare cuvînt. Structura fixă a cuvîntului permite, de fapt, corectarea erorilor care modifică structura. O singură eroare modifică întotdeauna structura cuvîntului de cod, adică fie apare un zero în plus și o unitate în minus, fie invers. Două erori pot modifica structura dacă sînt de același fel prin modificarea numărului de zerouri și unități; dacă simultan un zero este transformat în unu și un unu este transformat în zero, structura cuvîntului nu se schimbă. În general, toate erorile impare modifică structura cuvîntului de cod, în timp ce cele pare nu o modifică în mod obligatoriu.

b) Împărțim secvența pe cuvinte de cod și descifrăm textul:

0011010 A
0001010 [S]
1000101 T
0011010 A
0110001 Z
1110000 I

1100001 Spațiu între cuvinte
0011010 A
1001101 [V]
0111000 E
1010001 M
1100001 Spațiu între cuvinte
1001110 [C]
0110010 U
1100100 R
0101010 S
0110010 U
1100100 R
1111000 [I]

○ **Observație.** Dacă în situațiile în care apare eroare receptorul nu decodifică litera corectă, corecția se poate face la citire ținînd seama de context. Corecția este mult mai ușor de făcut în situația reală, pentru că erorile nu sînt atît de frecvente ca în exemplul luat în considerație, exemplu în care din 20 simboluri recepționate sînt eronate 4 simboluri, deci un procent de 20%.

2.18. *Utilizînd controlul de paritate pe coloane, să se găsească eroarea în fragmentul de cartelă perforată reprodus mai jos:*

Număr coloană	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	×	0	0	0	0
	×	×	1	1	×	×	1	×	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	×	2	2	2	2	2	2	2	2	2	×
	3	3	×	3	3	3	3	3	3	3	3	×	3	3
	4	4	4	4	4	×	×	4	×	4	4	4	4	×
	5	**5**	×	5	5	5	5	5	5	5	×	5	×	5
	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	×	7	7	×	×	7	×	×	7	7	×	×	7	×
	8	8	8	8	8	8	8	8	×	×	8	8	8	8
	9	×	×	9	9	×	9	9	9	9	9	9	×	9

Perforarea se face după codul alfa-numeric următor:

A	95	H	85	0	75	X	65	0	0	7	7
B	94	I	84	P	74	Y	64	4	4	8	8
C	93	Y	83	R	73	Z	63	6	6	9	9
D	92	K	82	S	72			—	11		
E	91	L	81	T	71			1	1		
F	90	N	80	U	70			2	2		
G	911	M	811	V	711			5	5		

Soluție

Controalele de paritate pentru coloanele *1* ... *14* dau

0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1.

Pozițiile eronate corespund coloanelor *3, 6* și *14*:

— în coloana *3* se citește 953, care va fi interpretat ca 95(A);
— în coloana *6* se citește 941, care va fi interpretat ca 94(B);
— în coloana *14* se citește 742, care va fi interpretat ca 74(P).

Codul scris pe cartelă și semnificația sa sînt:

71	91	953	72	71	941	74	71	81	95	75	73	95	742
T	E	(A)	S	T	(B)	P	T	I	N	O	R	A	(P)

Din context rezultă descifrarea textului ciorect: TE AȘTEPT ÎN ORAȘ.

2.19. *Pentru detecția erorilor în sisteme ce transmit informația sub formă de cifre zecimale se folosește controlul modulo* N *al numărului transmis, al sumei cifrelor lui sau al sumei cifrelor numărului, multiplicată fiecare cu ponderea ordinului zecimal pe care-l reprezintă. În aceste sisteme, la cifrele informaționale se adaugă o cifră de control care reprezintă restul împărțirii cu* N *fie a numărului transmis, fie a sumei cifrelor numărului transmis, fie a sumei cifrelor multiplicate cu ponderile ordinului zecimal. Dacă la recepție cifra de control nu respectă regula după care se formează, se consideră că au apărut erori. Să se verifice corectitudinea următoarelor grupuri de cifre:*

a) *731, 810, 821, 933, 955, 990 dacă s-a făcut controlul modulo* 9 *al numărului transmis;*

b) *53724, 57350, 24510, 47388 dacă s-a făcut controlul modulo 10 al sumei cifrelor numărului de transmis;*

c) *53710, 24315, 17429 dacă s-a făcut controlul modulo 10 al sumei ponderate a cifrelor numărului de transmis.*

Soluție

a) Delimităm cifrele informaționale și cele de control; verificăm congruența modulo N a părții informaționale cu cea de control:

$73 \equiv 1$ modulo 9;

$81 \equiv 0$ modulo 9;

$82 \equiv 1$ modulo 9;

$93 \equiv 3$ modulo 9;

$95 \equiv 5$ modulo 9;

$99 \equiv 0$ modulo 9.

Deci toate combinațiile au fost transmise corect.

b) Delimităm cifrele informaționale și cele de control și verificăm congruența modulo N a sumei cifrelor cu cifra de control:

5372 $5 + 3 + 7 + 2 = 17 \equiv 7$ modulo 10; $4 \neq 7$, deci combinația transmisă 53724 este incorectă;

5735 $5 + 7 + 3 + 5 = 20 \equiv 0$ modulo 10; $0 = 0$, deci combinația transmisă 57350 este corectă;

2451 $2 + 4 + 5 + 1 = 12 \equiv 2$ modulo 10; $0 \neq 2$, deci combinația transmisă 24510 este eronată;

4738 $4 + 7 + 3 + 8 = 22 \equiv 2$ modulo 10: $8 \neq 2$, deci combinația transmisă 47388 este eronată.

c) Partea informațională pentru numerele transmise și suma ponderată a cifrelor sînt:

5371 $5 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 25 + 12 + 21 + 2 = 60$;

2431 $2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 10 + 16 + 9 + 9 = 37$;

1742 $1 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 5 + 28 + 12 + 4 = 49$.

Cifrele de control sînt:

$0 \equiv 60$ modulo 10, deci combinația 53710 este corectă;

$5 \not\equiv 37$ modulo 10, deci combinația 24315 este eronată;

$9 \equiv 49$ modulo 10, deci combinația 17429 este corectă.

PROBLEME PROPUSE

2.20. *Fie o sursă discretă caracterizată prin:*

$[S] = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5]$;

$\mathbf{P} = [0,\ 5\ 0{,}1\ 0{,}2\ 0{,}005\ 0{,}15]$.

a) *Să se efectueze codarea acestei surse utilizînd metoda Huffman, alfabetul codului avînd* $D = 2$ *litere.*

b) *Să se determine lungimea medie a cuvintelor de cod.*

c) *Codul obținut este absolut optimal?*

2.21. *Fie o sursă discretă care furnizează* $N = 30$ *mesaje. Se cere să se determine:*

a) *lungimea cuvintelor unui cod Hamming corector de o eroare și detector de două erori;*

b) *matricea de control* $\mathbf{H}$;

c) *expresiile corectorilor; să se explice luarea deciziei;*

d) *cuvîntul de cod cu toate simbolurile informaționale egale cu 1;*

e) *schema bloc a decodorului; să se indice semnalele la ieșirile tuturor elementelor decodorului în situația în care cuvîntul recepționat provine din cuvîntul de la punctul „d" prin eronarea simbolurilor de pe primele două poziții.*

2.22. *Fie un cod Hamming corector de erori cu* $k = 4$, $m = 3$. *Acest cod se folosește pentru detecția erorilor.*

a) *Care este numărul de erori care pot fi detectate?*

b) *Să se dea schema bloc a decodorului pentru acest caz.*

2.23. *Se dă matricea de control a unui cod ciclic corector de o eroare:*

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se cer

a) n, m k;
b) *polinoamele* h(x), p(x), g(x);
c) *matricea generatoare* **G**;
d) *corectorul corespunzător cuvîntului cu o eroare* [*1101011*];
e) *cuvîntul de cod corect din care provine cuvîntul eronat de mai sus.*

BIBLIOGRAFIE

1. Spătaru, Al. *Teoria transmisiunii informației*, vol. I. Ed. Tehnică, București, 1966.
2. Spătaru, Al. *Teoria transmisiunii informației*, vol. II. Ed. Tehnică, București, 1971.
3. Cullman, G. *Coduri detectoare și corectoare de erori*. Ed. Tehnică, București, 1972.
4. Angheloiu, I. *Teoria codurilor*. Ed. Militară, București, 1972.
5. Peterson, W., Weldon, E. *Error Correcting Codes*. MIT Press, Massachussets, 1972.
6. Tîmbal, V. *Zadăcinik po teorii informații i codirovaniu*. Izdatelstvo „Vîșcia Școla", Kiev, 1976.
7. Valțev, T. A. *Pamehoustoicivosti sistem peredaci dannîh s discretnîm nacopleniem*. Izdatelstvo „Fan", Tașkent, 1969.

CAPITOLUL 3

SEMNALE ALEATOARE ȘI TRANSMITEREA LOR PRIN SISTEME LINIARE ȘI NELINIARE

INTRODUCERE TEORETICĂ

A. Semnale aleatoare

Un **semnal aleator** este *o funcție de două variabile* $\xi(k,t)$, *unde* k *ia valori în spațiul eșantioanelor, iar* t *ia valori pe axa timpului.* Astfel, semnalul aleator $\xi(t)$ reprezintă de fapt mulțimea realizărilor sale particulare $\{\xi^{(k)}(t)\}$. Pentru orice valoare particulară $t = t_1$, $\xi(t_1) = \{\xi^{(k)}(t_1)\}$ este o variabilă aleatoare.

Un caz particular foarte simplu îl constituie *semnalele condiționat deterministe,* la care caracterul aleator intervine în mod parametric. Aceste semnale pot fi reprezentate de o funcție de timp în care unul sau mai mulți parametri sînt variabile aleatoare.

De exemplu, semnalul $\alpha \cos(\nu t + \varphi)$ este un semnal condiționat determinist dacă cel puțin unul dintre parametrii α, ν, φ este o variabilă aleatoare.

Proprietățile statistice ale semnalelor aleatoare pot fi caracterizate cu ajutorul *densităților de probabilitate.* Densitatea de probabilitate de ordinul n este $w_n(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)$, unde x_i reprezintă o valoare particulară a lui $\xi(t_i)$.

● **Valorile medii statistice** reprezintă *momentele de diferite ordine* j *ale variabilelor aleatoare* $\xi(t_i)$ pentru $\forall_i$. Cele mai uzuale sînt:

● *valoarea medie* (j = 1) și *valoarea pătratică medie* ($j = 2$):

$$\overline{\xi^j(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^j w_1(x_1; t_1)\, dx_1; \tag{3.1}$$

● *funcția de corelație (corelație mutuală* pentru semnale diferite $\eta(t) \neq \xi(t)$ și *autocorelație* pentru $\eta(t) = \xi(t)$)

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\,\eta(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2)\, dx_1\, dy_2; \tag{3.2,a}$$

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\,\xi(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2; \tag{3.2,b}$$

○ **Observație.** În cazurile în care nu pot apărea confuzii, la funcția de autocorelație indicele ξ poate lipsi.

● *dispersia*

$$\sigma^2(t_1) = \overline{[\xi(t_1) - \overline{\xi(t_1)}]^2} = \overline{\xi^2(t_1)} - \overline{\xi(t_1)}^2; \tag{3.3}$$

• *funcția de covariație mutuală*:

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \overline{[\xi(t_1) - \overline{\xi(t_1)}][\eta(t_2) - \overline{\eta(t_2)}]} = B_{\xi\eta}(t_1, t_2) - \overline{\xi(t_1)}\,\overline{\eta(t_2)}. \quad (3.4)$$

• *covariația normalizată* sau *coeficientul de corelație:*

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K_{\xi\eta}(t_1, t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\,\sigma_\eta(t_2)}. \quad (3.5)$$

● Prezintă interes și **valorile medii temporale** ale semnalelor aleatoare definite pentru anumite realizări particulare. Cele mai uzuale sînt:

• *valoarea medie (componenta continuă):*

$$\widetilde{\xi^{(k)}(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi^{(k)}(t)\, dt; \quad (3.6)$$

• *valoarea pătratică medie (puterea medie):*

$$\widetilde{[\xi^{(k)}(t)]^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\xi^{(k)}(t)]^2\, dt; \quad (3.7)$$

• *funcția de corelație (autocorelație* pentru $\eta(t) = \xi(t)$ și *corelație mutuală* pentru $\eta(t) \neq \xi(t)$):

$$R_{\xi\eta}^{(k)}(\tau) = \widetilde{\xi^{(k)}(t)\eta^{(k)}(t-\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi^{(k)}(t)\, \eta^{(k)}(t-\tau)\, dt. \quad (3.8)$$

○ **Observație.** Uneori se omite scrierea indicelui (k), subînțelegîndu-se că este vorba de o realizare particulară.

● În aplicațiile practice se întîlnesc frecvent anumite clase sau **tipuri de semnale aleatoare,** dintre care se amintesc *semnalele staționare, semnalele ergodice, semnalul pur aleator, semnalele gaussiene.*

• Se numesc **staționare** *semnalele ale căror proprietăți statistice nu depind de originea timpului:*

$$w_n(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = w_n(x_1, ..., x_n; t_1 + \tau, ..., t_n + \tau) \quad (3.9,a)$$

Dacă relația (3.9) este satisfăcută pentru orice n, semnalul este *staționar în sens strict.* Semnalele care satisfac această relație pentru ordinul I și II ($n = 1$ și $n = 2$) se numesc *staționare în sens larg.* Funcțiile de corelație statistică ale semnalelor staționare depind numai de diferența $\tau = t_1 - t_2$, iar celelalte medii statistice definite mai sus sînt constante ($\overline{\xi(t_1)} = \bar{x} = \sqrt{B(\infty)}$, $\overline{\xi^2(t_1)} = \overline{x^2} = B(0)$, $\sigma^2(t_1) = \sigma^2$).

• **Semnalele ergodice** reprezintă *acea submulțime a semnalelor staționare în sens strict pentru care mediile statistice sînt egale cu mediile temporale.*

• **Semnalul pur aleator** este *acel semnal ale cărui valori succesive sînt independente* și, ca urmare,

$$w_n(x_n; t_n/x_1, ..., x_{n-1}; t_1, ..., t_{n-1}) = w_1(x_n, t_n). \quad (3.9,b)$$

• Un **semnal gaussian** este *un semnal staționar în sens larg la care densitățile de probabilitate de ordinul I și II sînt de forma:*

$$\left.\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{x-\bar{x}}{2\sigma^2}\right]; \\ w_2(x_1, x_2; \tau) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}}\cdot \\ \exp\left[-\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2-2\rho(\tau)(x_1-\bar{x})(x_2-\bar{x})}{2\sigma^2[1-\rho^2(\tau)]}\right], \end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

unde

$$\rho(\tau) = \frac{B_\xi(\tau) - \bar{x}^2}{\sigma^2}.$$

Densitatea de probabilitate de ordinul II a două semnale gaussiene, $\xi(t)$ și $\eta(t)$ este:

$$w_2(x_1, y_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-2\rho^2(\tau)}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2(\tau))}\left[\frac{(x_1-\bar{x})^2}{\sigma_\xi^2}+\frac{(y_2-\bar{y})^2}{\sigma_\eta^2}-\frac{2\rho(\tau)(x_1-\bar{x})(y_2-\bar{y})}{\sigma_\xi\sigma_\eta}\right]\right\}. \quad (3.11)$$

unde

$$\rho(\tau) = \frac{B_{\xi\eta}(\tau) - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_\xi\sigma_\eta}.$$

• În analiza semnalelor aleatoare, un rol deosebit de important îl joacă **teorema Wiener-Hincin** conform căreia, în cazul unui semnal aleator staționar în sens larg, densitatea spectrală de putere și funcția de autocorelație statistică sînt perechi Fourier:

$$\left.\begin{aligned} q(\omega) &= \mathcal{F}\{B(\tau)\}; \\ B(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{q(\omega)\} \end{aligned}\right\} \quad (3.12)$$

În cazul semnalelor ergodice, în relațiile (3.12) $B(\tau)$ poate fi substituit prin $R(\tau)$.

Funcția de autocorelație temporală a semnalelor ergodice are o serie de proprietăți care se adaugă la cea dată de relația (3.12):

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\xi(t)} = \sqrt{R(\infty)}; \\ &\overline{\xi^2(t)} = R(0) = P(\text{puterea}); \quad \sigma^2 = R(0) - R(\infty); \\ &R(\tau) = R(-\tau); \\ &R(0) \geqslant |R(\tau)|. \end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

B. Transmiterea semnalelor aleatoare prin sisteme liniare

La transmiterea semnalelor aleatoare prin sisteme liniare, cunoscînd densitatea spectrală de putere a semnalului de la intrare $\xi(t)$, poate fi determinată densitatea spectrală de putere a semnalului $\eta(t)$ de la ieşire:

$$q_\eta(\omega) = q_\xi(\omega)\,|H(j\omega)|^2. \tag{3.14}$$

Dacă semnalul $\xi(t)$ *este staţionar,* atunci şi $\eta(t)$ este staţionar. În acest caz funcţia de autocorelaţie $B_\eta(\tau)$ se determină cu relaţia (3.12).

Considerînd că la intrarea unui sistem liniar se aplică un semnal pur aleator (zgomot alb), constrîngerile introduse de sistem pot fi apreciate cu ajutorul *timpului de corelaţie* τ_0:

$$\tau_0 = \frac{\int_0^\infty B_\eta(\tau)\,d\tau}{B(0)}. \tag{3.15}$$

● O categorie aparte de sisteme liniare, întîlnite la recepţia semnalelor slabe (semnale acoperite de perturbaţii aleatoare), o constituie **filtrele adaptate.** Filtrul adaptat la o formă particulară de semnal $s(t)$ are funcţia de pondere proporţională cu imaginea întîrziată a semnalului:

$$h(t) = Ks[-(t - \tau_f)], \tag{3.16}$$

unde τ_f reprezintă întîrzierea introdusă de filtru. Funcţia de transfer a filtrului adaptat este

$$H(j\omega) = e^{-j\omega\tau_0}\overset{*}{S}(j\omega), \tag{3.17}$$

unde $\overset{*}{S}(j\omega)$ este conjugata densităţii spectrale a semnalului $s(t)$.

Proprietatea remarcabilă a filtrului adaptat o constituie faptul că răspunsul $y(t)$ la un semnal $x(t)$ este corelaţia mutuală a semnalului de intrare cu semnalul la care este adaptat filtrul:

$$y(t) = KR_{xs}(t - \tau_f). \tag{3.18}$$

În cazul în care $x(t) = s(t)$, răspunsul este funcţia de autocorelaţie a semnalului $s(t)$.

● Din clasa semnalelor aleatoare fac parte şi zgomotele. Cel mai frecvent se întîlneşte **zgomotul de fluctuaţii,** denumit şi zgomot gaussian datorită distribuţiei sale [1]. Zgomotul de fluctuaţii care perturbă transmisia informaţiei provine din canalul de transmisie, din sursa de semnal de la intrarea receptorului (antenă, cablu) şi din receptor. Produc zgomot de fluctuaţii atît rezistenţele (datorită agitaţiei termice), cît şi toate dispozitivele active (tuburi, diode, tranzistoare).

Orice rezistență, ca „sursă de zgomot", poate fi reprezentată printr-o rezistență „fără zgomot" și un generator ideal de tensiune sau de curent, așa cum se arată în figura 1. Expresia pătratului tensiunii eficace de zgomot este dată de formula lui Nyquist:

$$E_{ef}^2 = 4kTR\Delta f, \tag{3.19}$$

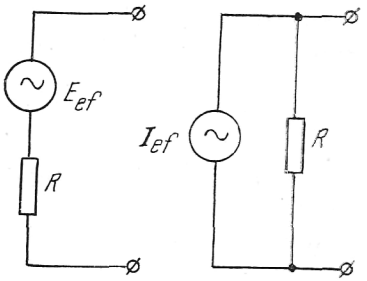


Fig. 1. Schemele echivalente ale unei rezistențe ca sursă de zgomot.

unde:

$k = 1{,}37 \cdot 10^{-23}$ Ws/grad este constanta lui Boltzman;

T — temperatura absolută;

Δf — lărgimea de bandă considerată.

Notînd cu $p_E(f)$ densitatea spectrală definită pentru frecvențe nenegative, se poate scrie

$$p_E(f) = 4kTR. \tag{3.20}$$

În cazul unei impedanțe Z densitatea spectrală este:

$$p_E(f) = 4kT\,\mathrm{Re}\{Z\}. \tag{3.21}$$

În cazul circuitului echivalent cu generator de curent reprezentat în figura 1 se poate scrie:

$$\left.\begin{aligned} I_{ef}^2 &= \frac{E_{ef}^2}{R^2} = 4\,kTG\Delta f; \\ p_I(f) &= 4\,kTG; \\ p_I(f) &= 4\,k\,T\,\mathrm{Re}\{Y\}. \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

Din relațiile de mai sus se observă că zgomotul de agitație termică are densitatea spectrală constantă în raport cu frecvența, deci este un zgomot alb.

Zgomotul propriu al sursei de semnal conectate la intrarea receptorului se datorește rezistenței interne R_i a acestei surse. În cazul adaptării intrării receptorului la sursă, puterea de zgomot introdusă de sursă în receptor este

$$P_S = kT\Delta f, \tag{3.23}$$

respectiv densitatea spectrală de putere este

$$p_S(f) = kT. \tag{3.24}$$

Zgomotul propriu al receptorului provine, în principal, din primele etaje ale receptorului, unde nivelul semnalului util este mic. Cu toate că acest zgomot este colorat, dacă lărgimea de bandă a receptorului este relativ mică, el poate fi considerat zgomot alb.

Pentru aprecierea cantitativă a zgomotului propriu al receptorului se introduce *factorul de zgomot* F, reprezentînd raportul dintre densitatea spectrală de putere echivalentă la intrarea receptorului (incluzînd atît zgomotul

sursei, cît și pe cel al receptorului) și densitatea spectrală de putere a zgomotului sursei la intrarea receptorului:

$$F = \frac{p_i(f)}{p_S(f)} = \frac{p_i(f)}{kT}. \tag{3.25}$$

○ **Se observă că** factorul de zgomot F reprezintă sensibilitatea receptorului în unități kT.

Adesea, el se exprimă în decibeli:

$$G = 10 \lg F. \tag{3.26}$$

Dacă receptorul are o amplificare de putere A constantă în banda Δf, puterea de zgomot la ieșire este

$$P = kTFA\Delta f. \tag{3.27}$$

○ **Notă.** *În cazul transmiterii semnalelor aleatoare prin sisteme liniare fără memorie,* se pot determina proprietățile statistice ale semnalului de ieșire.

C. Transmiterea semnalelor aleatoare prin sisteme neliniare

Sistemul neliniar fără memorie caracterizat de transformarea $y = f(x)$ transformă variabila aleatoare de intrare $\xi(t_1)$ într-o variabilă aleatoare de ieșire $\eta(t_1) = f[\xi(t_1)]$.

Dacă semnalul $\xi(t)$ este staționar (caz considerat în continuare), și $\eta(t)$ este staționar.

- **Densitatea de probabilitate la ieșire** este [1]:
- dacă funcția inversă $f^{-1}(y)$ este uniformă

$$W(y) = w(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|; \tag{3.28}$$

- dacă funcția inversă $f^{-1}(y)$ nu este uniformă și unei valori y_0 îi corespund mai multe valori $x_{01}, x_{02}, \ldots$

$$W(y) = w(x_{01})\left|\frac{dx_{01}}{dy}\right| + w(x_{02})\left|\frac{dx_{02}}{dy}\right| + \ldots \tag{3.29}$$

- **Valoarea medie** și **valoarea pătratică medie** se determină cu relația:

$$m_k\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^k(x)\, w(x)\, dx, \tag{3.30}$$

iar **dispersia**:

$$\sigma_\eta^2 = m_2\{\eta\} - m_1^2\{\eta\}. \tag{3.31}$$

- **Funcția de autocorelație** este:

$$B_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\, f(x_2)\, w_2(x_1, x_2; \tau)\, dx_1\, dx_2, \tag{3.32}$$

iar **densitatea spectrală de putere** se determină cu relația (3.12).

PROBLEME REZOLVATE

3.1. *Fie semnalul condiționat determinist* $x(t) = \alpha \sin(\omega t + \varphi)$, *unde* α *este o variabilă aleatoare cu distribuție uniformă în intervalul* $[-V, V]$, *iar* ω *și* φ *sînt constante. Să se calculeze următoarele medii statistice: valoarea medie, valoarea pătratică medie și funcția de autocorelație. Să se indice dacă semnalul este sau nu este staționar în sens larg.*

Soluție

Pentru calcularea valorii medii și valorii pătratice medii este necesară cunoașterea densității de probabilitate de ordinul I, care se determină conform relației (3.1):

$$w_1(x_1;\ t_1) = w_1(\alpha)\left|\frac{d\alpha}{dx_1}\right|,$$

unde

$$w_1(\alpha) = \begin{cases} 1/2V & \text{pentru } |\alpha| \leqslant V \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Ca urmare se obține:

$$w_1(x_1;\ t_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{2V|\sin(\omega t_1+\varphi)|} & \text{pentru } |x_1| \leqslant V|\sin(\omega t_1+\varphi)| \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Se constată că densitatea de probabilitate de ordinul I depinde de timp, deci semnalul $x(t)$ nu este staționar.

Se calculează $\overline{x(t_1)}$ și $\overline{x^2(t_1)}$ conform definiției date de relația (3.1):

$$\overline{x(t_1)} = \int_{-V|\sin(\omega t_1+\varphi)|}^{V|\sin(\omega t_1+\varphi)|} \frac{x_1}{2V|\sin(\omega_1 t+\varphi)|}\,dx_1 = 0;$$

$$\overline{x^2(t_1)} = \int_{-V|\sin(\omega t_1+\varphi)|}^{V|\sin(\omega t_1+\varphi)|} \frac{x_1^2}{2V|\sin(\omega_1 t+\varphi)|}\,dx_1 = \frac{V^2}{3}\sin^2(\omega t_1+\varphi).$$

Pentru determinarea funcției de autocorelație este necesară cunoașterea densității de probabilitate de ordinul II. Se știe că

$$w_2(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2) = w_1(x_1;\ t_1)\, w_2(x_2;\ t_2/x_1;\ t_1).$$

Semnalul $x(t)$ fiind condiționat determinist, valoarea lui la t_1 determină în mod univoc valoarea lui la t_2, adică x_2 ia cu probabilitate 1 valoarea:

$$x_2 = \frac{x_1 \sin(\omega t_2+\varphi)}{\sin(\omega t_1+\varphi)}$$

și ca urmare

$$w_2(x_2;\ t_2/x_1;\ t_1) = \begin{cases} \delta\left[x_2 - \dfrac{x_1\sin(\omega t_2+\varphi)}{\sin(\omega t_1+\varphi)}\right] & \text{pentru } \begin{cases} |x_1| \leqslant V|\sin(\omega t_1+\varphi)| \\ |x_2| \leqslant V|\sin(\omega t_2+\varphi)| \end{cases} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

(cu δ s-a notat funcția Dirac).

Conform relației (3.2), funcția de autocorelație este:

$$B(t_1,\ t_2) = \overline{x(t_1)\ x(t_2)} =$$

$$= \int_{-V|\sin(\omega t_1+\varphi)|}^{V|\sin(\omega t_1+\varphi)|} \frac{x_1}{2V|\sin(\omega t_1+\varphi)|}\,dx_1 \int_{-V|\sin(\omega t_2+\varphi)|}^{V|\sin(\omega t_2+\varphi)|} x_2\,\delta\left[x_2 - \right.$$

$$\left. - \frac{x_1 \sin(\omega t_2+\varphi)}{\sin(\omega t_1+\varphi)}\right] dx_2 = \int_{-V|\sin(\omega t_1+\varphi)|}^{V|\sin(\omega t_1+\varphi)|} \frac{x_1^2 \sin(\omega t_2+\varphi)}{2V|\sin(\omega t_1+\varphi)|\sin(\omega t_1+\varphi)}\,dx_1 =$$

$$= \frac{V^2}{3} \cdot \frac{|\sin(\omega t_1+\varphi)|^3 \sin(\omega t_2+\varphi)}{|\sin(\omega t_1+\varphi)|\sin(\omega t_1+\varphi)} = \frac{V^2}{3}\sin(\omega t_1+\varphi)\sin(\omega t_2+\varphi).$$

3.2. *Fie două procese aleatoare staționare independente, $\xi(t)$ și $\eta(t)$, și fie $\gamma(t) = \xi(t) + \eta(t)$. Să se exprime $B_\gamma(\tau)$ și $q_\gamma(\omega)$ în funcție de $B_\xi(\tau)$, $B_\eta(\tau)$, $q_\xi(\omega)$ și $q_\eta(\omega)$.*

Soluție

Conform definiției funcției de autocorelație statistice:

$$B_\gamma(\tau) = \overline{\gamma(t_1)\ \gamma(t_1-\tau)} = \overline{[\xi(t_1)+\eta(t_1)]\,[\xi(t_1-\tau)+\eta(t_1-\tau)]} =$$

$$= \overline{\xi(t_1)\,\xi(t_1-\tau)} + \overline{\eta(t_1)\ \eta(t_1-\tau)} + \overline{\xi(t_1)\,\eta(t_1-\tau)} + \overline{\xi(t_1-\tau)\ \eta(t_1)}.$$

Primii doi termeni reprezintă funcțiile de autocorelație $B_\xi(\tau)$ și $B_\eta(\tau)$. Ținând seama mai întîi de independența proceselor $\xi(t)$ și $\eta(t)$, apoi de staționaritatea lor, termenul al treilea poate fi adus la forma:

$$\overline{\xi(t_1)\eta(t_1-\tau)} = \overline{\xi(t_1)}\ \overline{\eta(t_1-\tau)} = \overline{\xi(t)}\ \overline{\eta(t)} = \sqrt{B_\xi(\infty)\ B_\eta(\infty)}.$$

Evident

$$\overline{\xi(t_1-\tau)\ \eta(t_1)} = \sqrt{B_\xi(\infty)\ B_\eta(\infty)}$$

și ca urmare

$$B_\gamma(\tau) = B_\xi(\tau) + B_\eta(\tau) + 2\sqrt{B_\xi(\infty)\,B_\eta(\infty)}.$$

Densitatea spectrală de putere a procesului $\gamma(t)$ este, conform teoremei Wiener-Hincin (vezi rel. (3.12)):

$$q_\gamma(\omega) = \mathfrak{F}\{B_\gamma(\tau)\} = \mathfrak{F}\{B_\xi(\tau)\} + \mathfrak{F}\{B_\eta(\tau)\} +$$

$$+ \mathfrak{F}\{2\sqrt{B_\xi(\infty)\ B_\eta(\infty)}\}.$$

Primii doi termeni reprezintă densitățile spectrale de putere $q_\xi(\omega)$ și $q_\eta(\omega)$, iar cel de-al treilea poate fi calculat cu ușurință:

$$\mathfrak{F}\{2\sqrt{B_\xi(\infty)\,B_\eta(\infty)}\} = 2\sqrt{B_\xi(\infty)\,B_\eta(\infty)}\,\mathfrak{F}\{1\} = 4\pi\sqrt{B_\xi(\omega)\,B_\eta(\infty)}\,\delta(\omega).$$

Deci

$$q_\gamma(\omega) = q_\xi(\omega) + q_\eta(\omega) + 4\pi\sqrt{B_\xi(\infty)\,B_\eta(\infty)}\,\delta(\omega).$$

3.3. *Fie funcția de autocorelație a unui semnal aleator ergodic cu distribuție gaussiană*

$$R(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} + B,$$

unde A, B, α *sînt constante pozitive. Se cere să se determine:*

a) *valoarea medie, valoarea pătratică medie, dispersia;*
b) *puterea semnalului;*
c) *densitatea de probabilitate;*
d) *densitatea spectrală de putere.*

Soluție

a, b) Din proprietățile funcției de autocorelație a unui semnal aleator ergodic rezultă (v. rel. (3.13)):

$$\bar{\xi} = \sqrt{R(\infty)} = \sqrt{B};$$

$$\overline{\xi^2} = R(0) = P = A + B;$$

$$\sigma^2 = R(0) - R(\infty) = A.$$

c) Cunoscînd $\bar{\xi}$ și σ^2, se poate scrie densitatea de probabilitate

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} \exp\left[-\frac{(x-\sqrt{B})^2}{2A}\right].$$

d) Densitatea spectrală de putere este, conform teoremei Wiener-Hincin:

$$q(\omega) = \mathfrak{F}\{R(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau}\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} Be^{-j\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= A\int_{-\infty}^{0} e^{\tau(\alpha - j\omega)}\, d\tau + A\int_{0}^{\infty} e^{-\tau(\alpha + j\omega)}\, d\tau + 2\pi B\delta(\omega) =$$

$$= A\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + 2\pi B\delta(\omega).$$

3.4. *Fie funcțiile din figura* 3.4. *Să se stabilească pentru fiecare dintre aceste funcții în parte dacă poate reprezenta funcția de autocorelație a unui semnal aleator.*

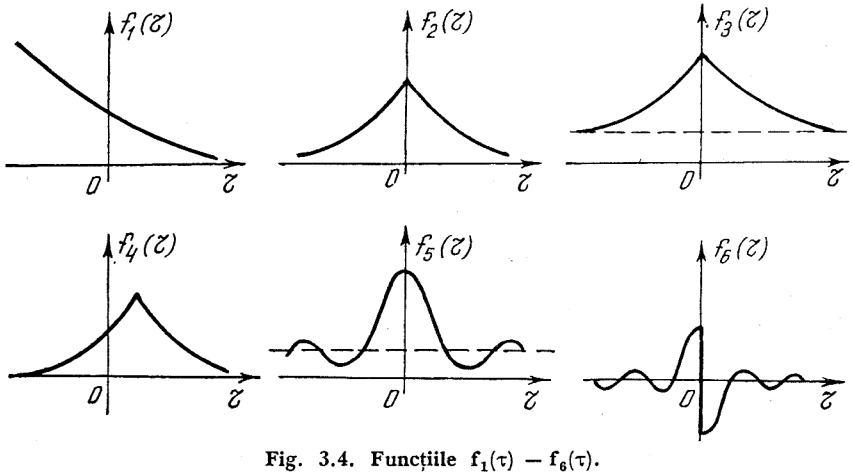


Fig. 3.4. Funcțiile $f_1(\tau) - f_6(\tau)$.

Soluție

Funcțiile $f_2(\tau)$, $f_3(\tau)$ și $f_5(\tau)$ reprezintă funcțiile de autocorelație ale unor semnale aleatoare, ele fiind funcții pare și avînd maximum în origine.

Nu pot fi funcții de autocorelație $f_1(\tau)$, $f_4(\tau)$, $f_6(\tau)$ deoarece ele nu satisfac aceste condiții.

3.5. *Fie* $\xi(t)$ *un semnal aleator ergodic cu densitatea spectrală de putere* $q\xi(\omega) = N_0/2$ *pentru* $\forall\omega$ *(zgomot alb) și fie semnalul determinist* $\delta(t)$. *Să se calculeze funcțiile de autocorelație ale celor două semnale și să se interpreteze rezultatele.*

Soluție

În conformitate cu teorema Wiener-Hincin, pentru semnalul aleator ergodic $\xi(t)$ se poate scrie

$$R_\xi(\tau) = B_\xi(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{q_\xi(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} e^{j\omega\tau}\, d\omega = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau).$$

Funcția de autocorelație a semnalului $\delta(t)$ este [1]:

$$k_\delta(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{|\Delta(j\omega)|^2\}$$

unde $|\Delta(j\omega)|^2$ este densitatea spectrală de energie a semnalului $\delta(t)$. Deoarece

$$\Delta(j\omega) = \mathfrak{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t} dt = 1,$$

rezultă funcția de autocorelație

$$k_\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\, d\omega = \delta(\tau).$$

○ **Observație.** Cu toate că cele două semnale sînt de natură diferită (primul pur aleator, de energie infinită, al doilea — determinist aperiodic, de energie finită), se remarcă *aceeași formă a funcției de autocorelație (avînd însă dimensiunea unei puteri în primul caz și cea a unei energii — în al doilea).*

Explicația aspectului comun al celor două funcții de autocorelație este legată de faptul că acestea nu conțin nici o informație asupra fazei. Atît $\delta(t)$, cît și $\xi(t)$, pot fi puse sub forma unei sume infinite de cosinusoide, diferența constînd numai în fazele acestora.

Astfel

$$\delta(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\Delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t\, d\omega,$$

deci în cazul semnalului $\delta(t)$ toate componentele cosinusoidale sînt de fază zero.

Zgomotul alb poate fi considerat ca format din însumarea unui număr foarte mare de impulsuri independente, de amplitudine și durată infinit de mică și de fază aleatoare [1], deci:

$$\xi(t) = \sum_k \Delta\tau_k \delta(t - \xi_k) = \sum_k \Delta\eta_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t - \varphi_k)\, d\omega,$$

unde φ_k este o variabilă aleatoare cu distribuție uniformă în intervalul $[0,2\pi]$. Se poate scrie:

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_k \Delta\eta_k \cos(\omega t - \varphi_k)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t]\,d\omega,$$

unde α și β sînt variabile aleatoare:

$$\alpha = \sum_k \Delta\eta_k \cos\varphi_k;$$

$$\beta = \sum_k \Delta\eta_k \sin\varphi_k.$$

Introducînd notațiile

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2};$$

$$\Phi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$\xi(t)$ devine:

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma\cos(\omega t + \Phi)\,d\omega.$$

Rezultă că $\xi(t)$ reprezintă tot o sumă infinită de componente cosinusoidale dar, spre deosebire de $\delta(t)$, acestea au o fază aleatoare Φ. Prin trecerea de la semnal la funcția lui de autocorelație pierzîndu-se informația asupra fazei, $R_\xi(\tau)$ este de aceeași formă cu $k_\delta(\tau)$.

3.6. *Fie semnalul aleator telegrafic, care poate lua cu aceeași probabilitate valorile 1 și —1. Tranzițiile de la o valoare la alta (trecerile prin zero) sînt independente, aleatoare și sînt caracterizate de distribuția Poisson. Să se calculeze și să se reprezinte grafic funcția de autocorelație statistică a semnalului* $B(t_1, t_2)$.

Soluție

În figura 3.6,*a* este reprezentată o realizare particulară a acestui semnal. Tranzițiile semnalului avînd o distribuție Poisson, probabilitatea ca într-un interval t să aibă loc k tranziții, $P\{k, t\}$, este [1]:

$$P\{k,\ t\} = \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{T_0}\right)^k e^{\frac{-t}{T_0}}, \qquad (1)$$

unde T_0 este valoarea medie a intervalului dintre două tranziții, deci t/T_0 este valoarea cea mai probabilă a numărului de tranziții în intervalul t.

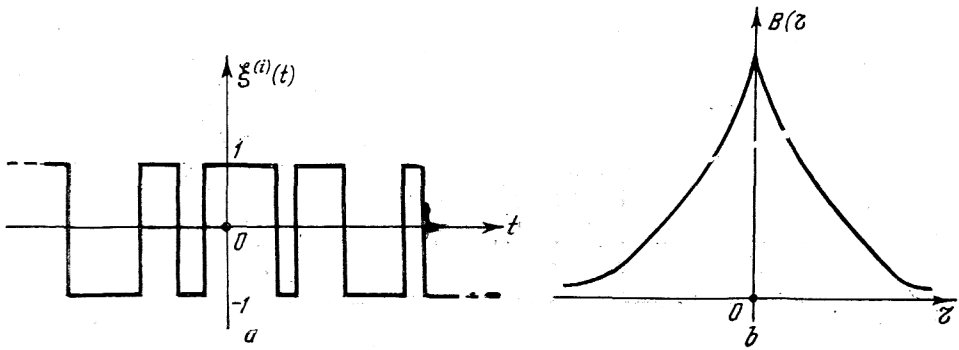


Fig. 3.6. Semnal aleator telegrafic:
a — o realizare particulară; *b* — funcția de autocorelație.

Funcția de autocorelație $B(t_1, t_2)$ se determină conform relației (3.2):

$$B(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\,\xi(t_2)} = 1 \cdot P\{x(t_2) = x(t_1)\} + (-1)\,P\{x(t_2) = -x(t_1)\}.$$

Evident, $x(t_2)$ coincide sau nu cu $x(t_1)$ după cum numărul de tranziții ce au loc în intervalul $t_2 - t_1$ este par sau impar.

Notînd $t_2 - t_1 = \tau$,

$$B(\tau) = P\{k\ par,\ \tau\} - P\{k\ impar,\ \tau\}$$

și, ținînd seama de relația (1) pentru $\tau > 0$, rezultă

$$B(\tau) = \sum_{k\,par} \frac{1}{k!}\left(\frac{\tau}{T_0}\right)^k e^{-\tau/T_0} - \sum_{k\,impar} \frac{1}{k!}\left(\frac{\tau}{T_0}\right)^k e^{-\tau/T_0} =$$

$$= e^{-\tau/T_0} \sum_k \frac{1}{k!}\left(-\frac{\tau}{T_0}\right)^k = e^{-2\tau/T_0}.$$

Funcția de autocorelație fiind pară, se poate scrie expresia finală

$$B(\tau) = e^{-2|\tau/T_0|}$$

Reprezentarea grafică este dată în figura 3.6,*b*.

○ **Concluzii.** Funcția de autocorelație nedepinzînd de originea timpului, semnalul aleator telegrafic analizat este *staționar în sens larg*. Mai mult, se poate arăta că acest semnal este și *ergodic*.

3.7. *Fie secvența aleatoare binară formată din simboluri 1 și —1 de durată* T *fiecare. Oricare simbol al secvenței poate lua cu aceeași probabilitate valorile 1 sau —1, independent de valoarea simbolurilor anterioare. Să se calculeze și să se reprezinte grafic funcția de autocorelație statistică a secvenței,* $B(t_1, t_2)$.

Soluție

În figura 3.7, *a* este prezentată o realizare particulară $\xi^{(i)}(t)$ a secvenței aleatoare binare. Se observă că semnalul are tranziții (treceri $-1 \to 1$ sau $1 \to -1$) numai la momente de timp reprezentînd multipli de T.

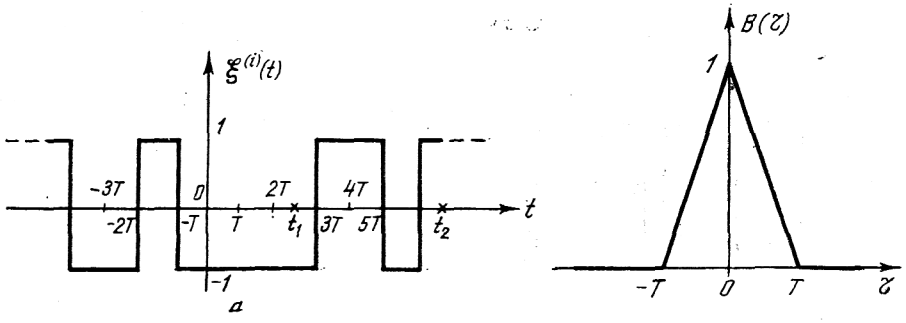


Fig. 3.7. Secvență aleatoare binară:
a — o realizare particulară; *b* — funcția de autocorelație.

Funcția de autocorelație $B(t_1, t_2)$ este:

$$B(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\,\xi(t_2)} = 1 \cdot P\{x(t_2) = x(t_1)\} +$$

$$+(-1) \cdot P\{x(t_2) = -x(t_1)\} = p_c - p_a, \qquad (1)$$

unde cu p_c și p_a se notează probabilitatea coincidenței, respectiv a anticoincidenței valorilor $x(t_1)$ și $x(t_2)$.

Evident, $x(t_2)$ coincide sau nu cu $x(t_1)$ după cum numărul tranzițiilor ce au loc între t_1 și t_2 este par sau impar. Pentru orice interval $t_2 - t_1$ se poate scrie:

$$t_2 - t_1 = NT + \theta, \qquad \text{unde} \begin{cases} N = 0, 1, 2 \ldots \\ 0 \leqslant \theta < T \end{cases}$$

Numărul de tranziții în intervalul $t_2 - t_1$ este dat de numărul k de tranziții din intervalul NT $(0 \leqslant k \leqslant N)$ la care se adaugă numărul de tranziții din intervalul θ (0 sau 1).

Datorită independenței simbolurilor secvenței, numărul tranzițiilor din intervalul NT are o distribuție binomială. Pentru fiecare interval T probabilitatea unei tranziții este egală cu probabilitatea absenței tranziției, deci cu $^1/_2$. Ca urmare, probabilitatea ca din N tranziții posibile în intervalul NT să aibă loc k tranziții este [1]:

$$P_N(k) = C_N^k 2^{-k} 2^{-(N-k)} = C_N^k 2^{-N} \qquad \text{pentru} \qquad 0 \leqslant k \leqslant N.$$

În ceea ce privește intervalul θ, probabilitatea ca acesta să conțină un moment iT (la care poate avea loc o tranziție) este:

$$P\{iT \in \theta\} = \frac{\theta}{T},$$

iar probabilitatea ca la iT să aibă loc o tranziție este $P_{iT}(1) = \frac{1}{2}$.

Probabilitatea ca în intervalul θ să aibă loc o tranziție, $P_\theta(1)$, este probabilitatea intersecției a două evenimente independente și ca urmare

$$P_\theta(1) = P\{iT \in \theta\} \cdot P_{iT}(1) = \frac{\theta}{2T},$$

iar probabilitatea ca în intervalul θ să nu aibă loc nici o tranziție, $P_\theta(0)$, este

$$P_\theta(0) = 1 - P_\theta(1) = \frac{2T - \theta}{2T}.$$

Cunoscînd $P_N(k)$, $P_\theta(1)$ și $P_\theta(0)$, se pot determina p_c și p_a:

$$p_c = P_\theta(0) \sum_{k\ par} P_N(k) + P_\theta(1) \sum_{k\ impar} P_N(k) \quad 0 \leqslant k \leqslant N;$$

$$p_a = P_\theta(0) \sum_{k\ impar} P_N(k) + P_\theta(1) \sum_{k\ par} P_N(k) \quad 0 \leqslant k \leqslant N.$$

Înlocuind p_c și p_a în relația (1), rezultă funcția de autocorelație:

- pentru $N = 0$ $(t_2 - t_1 = \theta)$:

$$B(t_1, t_2) = p_c\Big|_{N=0} - p_a\Big|_{N=0} = P_\theta(0) - P_\theta(1) = \frac{T-\theta}{T};$$

- pentru $N > 0$ $(t_2 - t_1 = NT + \theta)$:

$$B(t_1, t_2) = [P_\theta(0) - P_\theta(1)]\Big[\sum_{k\ par} P_N(k) - \sum_{k\ impar} P_N(k)\Big]$$

$$= 2^{-N}[P_\theta(0) - P_\theta(1)]\Big(\sum_{k\ par} C_N^k - \sum_{k\ impar} C_N^k\Big),$$

Deoarece,

$$\sum_{k\ par} C_N^k = \sum_{k\ impar} C_N^k,$$

rezultă, pentru $N > 0$

$$B(t_1, t_2) = 0.$$

○ **Se observă că** funcția de autocorelație nu depinde de originea timpului, ci numai de diferența $t_2 - t_1$, deci *secvența* aleatoare binară analizată este *staționară.*

Funcția de autocorelație fiind pară, se poate scrie expresia finală:

$$B(t_1, t_2) = B(t_2 - t_1) = B(\tau) = \begin{cases} \dfrac{T - |\tau|}{T} & |\tau| \leqslant T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$

Reprezentarea grafică este dată în figura 3.7,*b*.

○ **Notă.** Se poate arăta că secvența aleatoare binară este nu numai staționară, ci și ergodică.

3.8. *Fie o secvență pseudoaleatoare periodică de lungime maximală* $n = 2^m - 1$ *(v. cap. 2, problema 2.11), formată din simboluri de durată* T *fiecare. Să se calculeze și să se reprezinte grafic funcția de autocorelație* $R(\tau)$.

Soluție

Funcția de autocorelație a secvenței pseudoaleatoare $SPA(t)$ de perioadă nT se calculează conform relației [1]:

$$R(\tau) = \frac{1}{nT}\int_0^{nT} SPA(t)\, SPA(t-\tau)\, dt,$$

unde înmulțirea se face conform tabelului următor:

×	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

Se observă cu uşurinţă că notînd cu I_c şi I_a intervalele de timp în care $SPA(t)$ şi $SPA(t-\tau)$ coincid, respectiv nu coincid, $R(\tau)$ este:

$$R(\tau) = \frac{I_c - I_a}{nT}. \tag{1}$$

Pentru determinarea expresiilor I_c şi I_a, se poate considera SPA echivalentă formată din simboluri 0 şi 1. Echivalenţa $0 \leftrightarrow 1$, $1 \leftrightarrow -1$, se stabileşte pe baza izomorfismului grupurilor $1, -1/\times$ şi $0,1/\oplus$. Adunarea modulo doi este definită în tabelul următor:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

La calcularea funcţiei de autocorelaţie se vor folosi proprietăţile SPA de lungime maximală (demonstrate la problema 2.11):

— dacă SPA_j este o secvenţă pseudoaleatoare obţinută din SPA_i prin $j - i$ deplasări ciclice, atunci

$$SPA_i \oplus SPA_j = SPA_k,$$

unde adunarea modulo doi se face simbol cu simbol, iar SPA_k provine din SPA_i prin $k - i$ deplasări ciclice (de exemplu $1110100 \oplus 1010011 = 0100111$);

— orice SPA de lungime maximală $n = 2^m - 1$ conţine $\frac{n-1}{2} = 2^{m-1} - 1$ simboluri 0 şi $\frac{n+1}{2} = 2^{m-1}$ simboluri 1 (deci cu un simbol 1 mai mult).

Fie τ din relaţia (1)

$$\tau = \theta + jT, \text{ unde } 0 \leqslant \theta < T \text{ şi } j = 0, 1, 2, \ldots, n-2.$$

Pentru determinarea expresiilor I_c şi I_a, se consideră suma modulo doi $SPA(t) \oplus SPA(t-\tau)$ pe o perioadă nT:

$$SPA(t) \oplus SPA(t-\tau) = \begin{cases} SPA_0 \oplus SPA_{j+1} \text{ într-un interval } \theta \text{ la fiecare } T; \\ SPA_0 \oplus SPA_j \text{ într-un interval } T - \theta \text{ la fiecare } T. \end{cases}$$

Notînd cu $N_0\{SPA_i \oplus SPA_j\}$ şi cu $N_1\{SPA_i \oplus SPA_j\}$ numărul de simboluri 0 (coincidenţe), respectiv 1 (anticoincidenţe) ale secvenţei $SPA_i \oplus SPA_j$, se poate scrie:

$$\left.\begin{aligned} I_c &= \theta N_0\{SPA_0 \oplus SPA_{j+1}\} + (T-\theta) N_0\{SPA_0 \oplus SPA_j\} \\ I_a &= \theta N_1\{SPA_0 \oplus SPA_{j+1}\} + (T-\theta) N_1\{SPA_0 \oplus SPA_j\} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

• *Pentru* $j = 0$ ($\tau = \theta$), înlocuind $j = 0$ şi $\theta = \tau$ în relaţiile (2) şi ţinînd seama de proprietăţile SPA, rezultă:

$$I_c = \tau \frac{n-1}{2} + (T - \tau) n;$$

$$I_a = \tau \frac{n+1}{2}.$$

Înlocuind I_c și I_a în relația (1) se obține

$$R(\tau) = \frac{T - \tau(1 + 1/n)}{T}.$$

- *Pentru* $0 < j < n - 2$ $(\tau = \theta + jT)$:

$$I_c = \theta \frac{n-1}{2} + (T - \theta) \frac{n-1}{2};$$

$$I_a = \theta \frac{n+1}{2} + (T - \theta) \frac{n+1}{2}$$

și rezultă:

$$R(\tau) = -\frac{1}{n}.$$

Deoarece $R(\tau)$ este o funcție pară și periodică, de perioadă nT, expresia pentru $|\tau| \leqslant (n-1)T$ este:

$$R(\tau) = \begin{cases} \dfrac{T - |\tau|\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{T} & \text{pentru } |\tau| \leqslant T; \\ -\dfrac{1}{n} & \text{pentru } T \leqslant |\tau| \leqslant (n-1)\,T, \end{cases}$$

iar reprezentarea grafică este cea din figura 3.8.

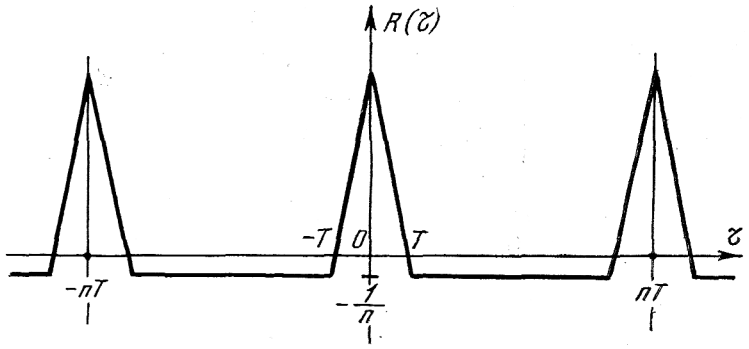


Fig. 3.8. Funcția de autocorelație a secvenței pseudoaleatoare periodice de lungime n.

○ **Se observă că** funcția de autocorelație a *SPA* este cu atît mai apropiată de cea a secvenței aleatoare binare (analizată în problema 3.7) cu cît n este mai mare.

3.9. *Să se calculeze și să se reprezinte grafic densitatea spectrală de putere a semnalului aleator telegrafic din problema* 3.6.

Soluție

Funcția de autocorelație a semnalului aleator telegrafic (v. problema 3.6) este:

$$B(\tau) = e^{-2|\tau/T_0|}.$$

Conform teoremei Wiener-Hincin

$$q(\omega) = \mathcal{F}\{B(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\tau/T_0|} e^{-j\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\tau(2/T_0 - j\omega)}\, d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\tau(2/T_0 + j\omega)}\, d\tau,$$

de unde rezultă

$$q(\omega) = \frac{4/T_0}{\omega^2 + (2/T_0)^2}.$$

În figura 3.9 este reprezentat $q(\omega)$.

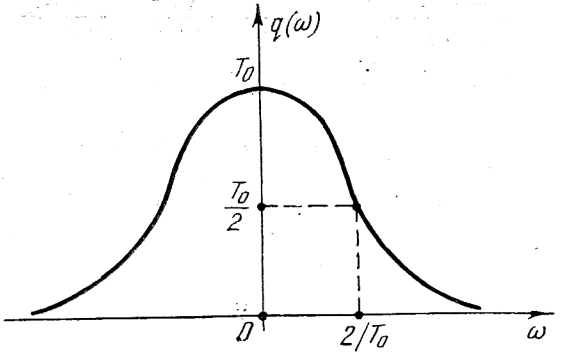


Fig. 3.9. Densitatea spectrală de putere a semnalului aleator telegrafic.

○ **Se observă că** frecvența unghiulară corespunzătoare unei atenuări de 3 dB este inversul constantei de timp ce intervine în exponentul funcției de autocorelație. Cu cît valoarea medie a intervalului dintre două tranziții, T_0, este mai mică, cu atît mai repede se atenuează funcția de autocorelație și cu atît mai mare este lărgimea de bandă a semnalului aleator telegrafic.

3.10. *Să se calculeze și să se reprezinte grafic densitatea spectrală de putere a secvenței aleatoare binare din problema* 3.7.

Soluție

Funcția de autocorelație a secvenței aleatoare binare (v. problema 3.7) este

$$B(\tau) = \begin{cases} \dfrac{T - |\tau|}{T} & |\tau| \leqslant T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$

Conform teoremei Wiener-Hincin

$$q(\omega) = F\{B(\tau)\} = \int_{-T}^{T} \frac{T - |\tau|}{T} e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\int_{0}^{T} \frac{T - \tau}{T} \cos \omega\tau \, d\tau.$$

Integrînd prin părți, rezultă

$$q(\omega) = T\left(\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2}\right)^2.$$

În figura 3.10 este reprezentat $q(\omega)$.

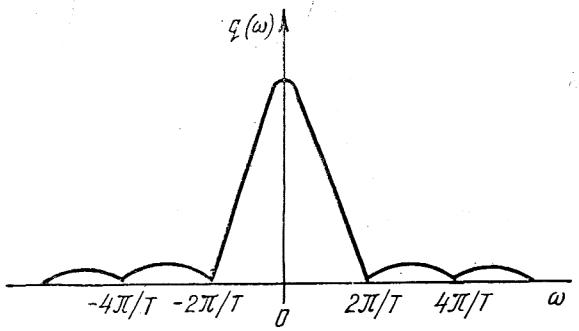


Fig. 3.10. Densitatea spectrală de putere a secvenței aleatoare binare.

Și la secvența aleatoare binară **se observă** legătura între lățimea funcției de autocorelație și lărgimea de bandă. Cu cît durata unui simbol, T, este mai mică, cu atît mai repede se atenuează funcția de autocorelație și cu atît mai lat este lobul principal al densității spectrale de putere $q(\omega)$.

3.11. *Fie filtrul trece-jos din figura* 3.11. *La intrarea acestuia se aplică zgomot de bandă largă* $\xi(t)$, *avînd densitatea spectrală de putere*

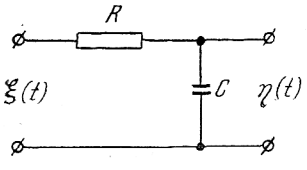


Fig. 3.11. Filtru trece-jos.

$$q_\xi(\omega) = \begin{cases} N_0/2 & |\omega| \leqslant \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

Se cere să se determine funcția de autocorelație a semnalului de la ieșirea filtrului, $B_\eta(\tau)$, *precum și timpul de corelație în următoarele două cazuri:* a) $\omega_0 \gg 1/RC$, b) $\omega_0 \ll 1/RC$.

Soluție

Funcția de transfer a filtrului trece-jos este

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

iar densitatea spectrală de putere a semnalului de la ieșirea filtrului este

$$q_\eta(\omega) = q_\xi(\omega)\,|H(j\omega)|^2 = q_\xi(\omega)\frac{1}{1 + (\omega RC)^2}.$$

a) *În cazul în care* $\omega_0 \gg RC$, banda zgomotului de intrare este mult mai mare decît banda filtrului și, ca urmare, zgomotul de bandă largă de la intrare are aproximativ același efect ca și zgomotul alb, adică:

$$q_{\eta_1}(\omega) \cong \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + (\omega RC)^2},$$

iar funcția de autocorelație este [1]:

$$B_{\eta_1}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{q_{\eta_1}(\omega)\} \cong \frac{N_0}{4RC} e^{-|\tau|/RC}.$$

Timpul de corelație se calculează conform relației (3.15):

$$\tau_{01} = \int_0^\infty e^{-|\tau|/RC} d\tau = RC.$$

b) *În cazul în care* $\omega_0 \ll RC$, se poate considera, dimpotrivă, $|H(j\omega)|^2 = 1$ în banda zgomotului și, ca urmare,

$$q_{\eta_2}(\omega) \cong q_\xi(\omega) = \begin{cases} N_0/2 & |\omega| \leqslant \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

iar funcția de autocorelație la ieșire (pentru calcul v.[1], p. 240—241)

$$B_{\eta_2}(\tau) \cong B_\xi(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{q_\xi(\omega)\} = \frac{\omega_0 N_0}{2\pi} \cdot \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau}.$$

Timpul de corelație este, în acest caz

$$\tau_{02} = \int_0^\infty \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} d\tau = \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2\omega_0}.$$

○ **Concluzii.** Analizînd τ_{01} și τ_{02}, se observă că timpul de corelație este determinat de filtru atunci cînd zgomotul de bandă este $\omega_0 \gg 1/RC$, respectiv de banda zgomotului de intrare dacă $\omega_0 \ll 1/RC$. Acest lucru era de așteptat, filtrul neintroducînd practic constrîngeri dacă banda semnalului de intrare este mult mai mică decît banda filtrului.

3.12. *Fie un semnal aleator de bandă îngustă (obținut prin trecerea zgomotului alb printr-un filtru trece-bandă de bandă îngustă, cu frecvența centrală* ω_0*) care poate fi pus sub forma*

$$\xi(t) = \alpha(t) \cos \omega_0 t + \beta(t) \sin \omega_0 t,$$

unde $\alpha(t)$ *și* $\beta(t)$ *sînt procese aleatoare cu variație lentă în timp față de* $\xi(t)$. *Se cere să se arate că:*

a) $\xi(t)$ *fiind de valoare medie nulă,* $\overline{\xi(t)} = 0$, $\overline{\alpha(t)} = \overline{\beta(t)} = 0$;

b) $B_\alpha(\tau) = B_\beta(\tau)$ *și* $B_{\alpha\beta}(\tau) = -B_{\beta\alpha}(\tau)$;

c) $\sigma_\xi^2 = \sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2$;

d) *dacă* $\xi(t)$ *este gaussian și densitatea spectrală de putere definită pentru frecvențe nenegative,* $p_\xi(\omega)$, *este simetrică față de* ω_0, *atunci* $\alpha(t)$ *și* $\beta(t)$ *sînt statistic independente.*

Soluție

În [1] se demonstrează că pentru semnalul aleator de bandă îngustă din relația (1) se poate scrie:

$$B_\xi(\tau) = \cos \omega_0\tau \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p_J(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega + \\ + \sin \omega_0\tau \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p_J(\omega) \sin \omega\tau \, d\omega, \tag{2}$$

unde $p_J(\omega) = p_\xi(\omega - \omega_0)$ este densitatea spectrală de putere a semnalului $\xi(t)$ translatată la frecvențe joase.

a) Știind că $\overline{\xi(t)} = 0$, din relația (1) rezultă

$$\overline{\xi(t)} = \overline{\alpha(t)} \cos \omega_0 t + \overline{\beta(t)} \sin \omega_0 t = 0,$$

de unde

$$\overline{\alpha(t)} = \overline{\beta(t)} = 0.$$

b) Pornind tot de la relația (1) se poate scrie

$$\overline{B_\xi(\tau)} = \overline{\xi(t)\xi(t-\tau)} = \overline{\alpha(t) \cdot \alpha(t-\tau)} \cos \omega_0 t \cos \omega_0(t-\tau) + \\ + \overline{\beta(t)\,\beta(t-\tau)} \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t-\tau) + \overline{\alpha(t)\,\beta(t-\tau)} \cos \omega_0 t \sin \omega_0(t-\tau) + \\ + \overline{\alpha(t-\tau)\,\beta(t)} \cos \omega_0(t - \omega_0\tau) \sin \omega_0 t =$$

$$= \frac{1}{2} B_\alpha(\tau) [\cos \omega_0\tau + \cos (2\omega_0 t - \omega_0\tau)] + \frac{1}{2} B_\beta(\tau) [\cos \omega_0\tau - \\ - \cos (2\omega_0 t - \omega_0\tau)] + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}(\tau)[\sin (2\omega_0 t - \omega_0\tau) - \sin \omega_0\tau] + \\ + \frac{1}{2} B_{\beta\alpha}(\tau) [\sin (2\omega_0 t - \omega_0\tau) + \sin \omega_0\tau].$$

Din identificarea acestei expresii a funcției de autocorelație cu cea dată de relația (2) rezultă

$$B_\alpha(\tau) = B_\beta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p_J(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega; \tag{3}$$

$$B_{\beta\alpha}(\tau) = - B_{\alpha\beta}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p_J(\omega) \sin \omega\tau \, d\omega \tag{4}$$

și se poate scrie

$$B_\xi(\tau) = B_\alpha(\tau) \cos \omega_0\tau + B_{\beta\alpha}(\tau) \sin \omega_0\tau. \tag{5}$$

c) Deoarece $\overline{\xi(t)} = 0$,

$$\sigma_\xi^2 = B_\xi(0)$$

dar, din (5) și ținînd seama de (3) rezultă

$$B_\xi(0) = B_\alpha(0) = B_\beta(0)$$

și, ca urmare,

$$\sigma_\xi^2 = \sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = \sigma^2.$$

d) Simetria față de ω_0 a densității spectrale de putere $p\xi(\omega)$ implică paritatea densității spectrale de putere translatate $p_J(\omega)$:

$$p_J(\omega) = p_J(-\omega).$$

Ca urmare, din relația (4) rezultă:

$$B_{\beta\alpha}(\tau) = -B_{\alpha\beta}(\tau) = 0, \tag{6}$$

adică $\alpha(t)$ și $\beta(t)$ sînt necorelate.

Pe de altă parte $\alpha(t)$ și $\beta(t)$ rezultînd prin transformări liniare ale lui $\xi(t)$, dacă $\xi(t)$ este gaussian $\alpha(t)$ și $\beta(t)$ vor fi, de asemenea, gaussiene.

Condiția de independență statistică a proceselor staționare $\alpha(t)$ și $\beta(t)$ este

$$w_{\alpha\beta}(x_1, x_2; \tau) = w_\alpha(x_1)\, w_\beta(x_2).$$

Dacă $\alpha(t)$ și $\beta(t)$ sînt procese gaussiene de valoare medie nulă și de dispersii egale σ^2, conform relației (3.11)

$$w_{\alpha\beta}(x_1, x_2; \tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}} \exp\left[-\frac{x_1^2 - 2\rho(\tau)x_1x_2 + x_2^2}{2\sigma^2[1-\rho^2(\tau)]}\right],$$

unde coeficientul de corelație este

$$\rho(\tau) = \frac{B_{\alpha\beta}(\tau)}{\sigma^2}.$$

Deoarece, conform relației (6), $\rho(\tau) = 0$, rezultă

$$w_{\alpha\beta}(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}\right) = w_\alpha(x_1)\, w_\beta(x_2),$$

adică $\alpha(t)$ și $\beta(t)$ sînt independente statistic.

3.13. *Fie un filtru adaptat la semnalul*

$$s(t) = \begin{cases} A & |t| \leqslant T/2 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Se cere să se determine răspunsul filtrului adaptat y(t) *la semnalele* s(t) *și* η(t), *unde* η(t) *este un semnal aleator.*

Soluție

Ținînd seama de faptul că $s(t)$ este par, din relația (3.16) rezultă funcția de pondere a filtrului adaptat:

$$h(t) = Ks(-t + \tau_0) = Ks(t - \tau_f).$$

Pentru ca să fie satisfăcută condiția de realizabilitate a filtrului ($h(t) = 0$ pentru $t < 0$), este necesar ca $\tau_f \geqslant T/2$. Fie $\tau_f = T/2$ și deci

$$h(t) = Ks(t - T/2) = \begin{cases} KA & 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Filtrul adaptat fiind un sistem liniar, răspunsul la $s(t) + \eta(t)$ este suma răspunsurilor la fiecare dintre semnale în parte. Conform relației (3.18) răspunsul $y(t)$ este:

$$y(t) = y_s(t) + y_\eta(t) = KR_s(t - T/2) + KR_{\eta s}(t - T/2).$$

Funcția de autocorelație a semnalului $s(t)$, $R_s(\tau)$, se calculează conform relației

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(t - \tau)\, dt.$$

În figura 3.13,*a* sînt reprezentate semnalele $s(t)$ și $s(t - \tau)$ pentru $\tau > 0$. Se observă că cele două semnale se suprapun (cel puțin parțial) numai pentru $0 \leqslant \tau \leqslant T$. Pentru acest interval de variație a lui τ

$$R_s(\tau) = A^2 \int_{-T/2+\tau}^{T/2} d\tau = A^2(T - \tau)$$

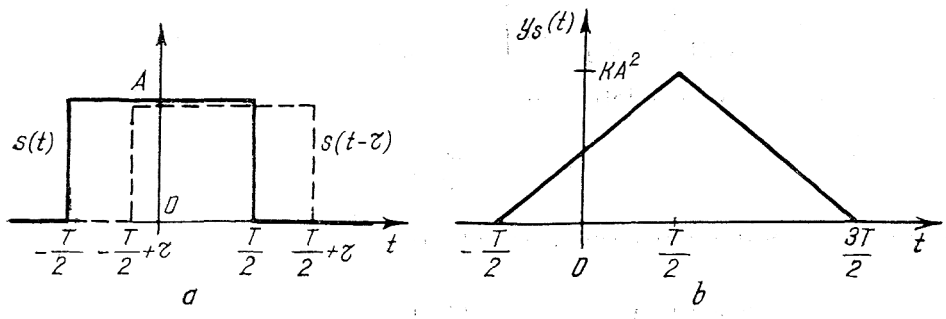


Fig. 3.13. Semnalul $s(t)$ la care este adaptat filtrul (a). Răspunsul filtrului la acest semnal (b)

Funcția de autocorelație fiind pară, se poate scrie:

$$R_s(\tau) = \begin{cases} A^2(T - |\tau|) & 0 \leqslant |\tau| \leqslant T; \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Deci *răspunsul filtrului adaptat la semnalul* $s(t)$ este

$$y_s(t) = KR_s(t - T/2) = \begin{cases} KA^2(T - |\tau - T/2|) & -T/2 < \tau < 3T/2; \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

În figura 3.13,*b* este reprezentat $y_s(t)$.

Răspunsul filtrului adaptat la semnalul $\eta(t)$ este:

$$y_\eta(t) = KR_{\eta s}(t - T/2) = K\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t - \lambda)\, s(\lambda - T/2)\, d\lambda =$$

$$= KA\int_0^T \eta(t - \lambda)\, d\lambda.$$

Se observă că $y_\eta(t)$ este proporțional cu media temporală a semnalului $\eta(t)$ pe un interval de durată T. Cu cît este mai mare T, cu atît mai mult se apropie această medie de $\eta(t)$, deci de o constantă.

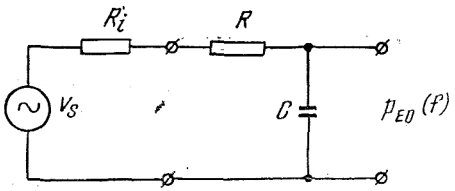


Fig. 3.14. Sursă de semnal conectată la intrarea unei celule *RC*.

3.14. *Fie o sursă de semnal de rezistență internă* R_i *conectată la intrarea unei celule de filtrare* RC, *așa cum se arată în figura* 3.14. *Să se determine expresia pătratului tensiunii eficace a zgomotului de agitație termică (datorat rezistențelor* R_i *și* R) *de la ieșire.*

Soluție

Circuitul echivalent pentru determinarea zgomotului de agitație termică rezultă din cel reprezentat în figura 3.14 dacă se consideră rezistențele fără zgomot și se înlocuiește sursa de semnal v_s cu un generator ideal de tensiune de zgomot a cărui densitate spectrală este, conform relației (3.20):

$$p_{Ei}(f) = 4kT\,(R_i + R).$$

Densitatea spectrală la ieșire (la bornele condensatorului C) este:

$$p_{Eo}(f) = p_{Ei}(f)\,|H(\mathrm{j}f)|^2,$$

unde $H(\mathrm{j}f)$ este funcția de transfer a circuitului R_i, R, C:

$$H(\mathrm{j}f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}2\pi fC(R_i + R)}.$$

Ca urmare

$$p_{Eo}(f) = \frac{4kT(R_i + R)}{1 + [2\pi fC(R_i + R)]^2},$$

iar

$$E_{ef}^2 = \int_0^\infty p_{Eo}(f)\,\mathrm{d}f = \int_0^\infty \frac{4kT(R_i + R)}{1 + [2\pi fC(R_i + R)]^2}\,\mathrm{d}f = \frac{kT}{C},$$

○ **Observație.** Rezultatul este interesant: E_{ef}^2 nu depinde de rezistența $R_i + R$; aceasta se explică prin faptul că dependența liniară a densității spectrale $p_{Ei}(f)$ de $R_i + R$ este compensată de dependența benzii FTJ de $R_i + R$ ($f_{3\mathrm{dB}} = 1/2\pi C(R_i + R)$). În schimb, cu toate că $p_{Ei}(f)$ nu depinde de C, E_{ef}^2 scade cu creșterea lui C tocmai datorită dependenței benzii FTJ de C.

3.15. *Fie un receptor la intrarea căruia este conectată o sursă de semnal de rezistență internă* R_i, *așa cum se arată în figura* 3.15. *Intrarea receptorului este adaptată la sursa de semnal* ($R = R_i$), *iar sensibilitatea lui este* 20 *dB. Demodulatorul receptorului este precedat de un bloc de intrare avînd o amplificare de putere de* 60 *dB și a cărui funcție de transfer poate fi aproximată cu cea a unui FTB ideal. Să se determine densitatea spectrală de putere a zgomotului propriu al sursei și receptorului la intrarea demodulatorului, cunoscînd că atît sursa, cît și receptorul lucrează la o temperatură de* 22°*C.*

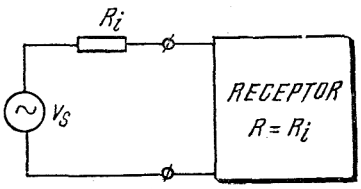


Fig. 3.15. Sursă de semnal conectată la intrarea unui receptor.

Soluție

Conform relației (3.25), densitatea spectrală de putere echivalentă la intrarea receptorului este

$$p_i(f) = kTF = kT + kT(F - 1),$$

unde primul termen reprezintă zgomotul de agitație termică al rezistenței interne a sursei, iar cel de-al doilea — zgomotul propriu al receptorului. La intrarea demodulatorului

$$p_o(f) = p_i(f)A = kTFA. \tag{1}$$

Ținînd seama de datele numerice, din relația (3.26) rezultă

$$F = 10^{G/10} = 100;$$

pe de altă parte amplificarea de putere

$$A = 10^{A_{dB}/10} = 10^6.$$

Înlocuind aceste date numerice, precum și $T = 295°K$ în relația (1) rezultă

$$p_o(f) = 1{,}37 \cdot 10^{-23} \cdot 295 \cdot 10^2 \cdot 10^6 = 0{,}404 \cdot 10^{-8}\ \mu W/Hz.$$

3.16. *Să se arate că momentele inițiale ale unui semnal gaussian de valoare medie nulă sînt de forma:*

$$\overline{\xi^{2k}(t)} = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k - 1)\sigma^{2k}; \tag{1}$$

$$\overline{\xi^{2k-1}(t)} = 0. \tag{2}$$

Soluție

Conform relației (3.10), densitatea de probabilitate de ordinul I este:

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(x)\, dx = 1,$$

se poate scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-cx^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}, \tag{3}$$

unde $c = 1/2\sigma^2$.

Derivînd expresia (3) de k ori în raport cu c, rezultă:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \exp(-cx^2)\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k - 1)}{2^k} \sqrt{\frac{\pi}{c^{2k+1}}}, \tag{4}$$

deci

$$\overline{\xi^{2k}(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k - 1)\sigma^{2k},$$

relația (1) fiind astfel demonstrată.

Derivînd acum expresia (4) în raport cu x, rezultă:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2k\, x^{2k-1} \exp(-cx^2)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} 2cx^{2k+1} \exp(-cx^2)\, dx = 0,$$

de unde

$$k\overline{\xi^{2k-1}(t)} - c\overline{\xi^{2k+1}} = 0.$$

Ţinînd seama de faptul că $\overline{\xi(t)} = 0$, prin recurenţă rezultă relaţia (2).

3.17. *Fie un sistem neliniar fără memorie caracterizat de transformarea* $y = ax^2 (a > 0)$. *La intrarea sistemului se aplică un semnal aleator staţionar gaussian* $\xi(t)$ *de valoare medie nulă. Se cere să se determine pentru semnalul de ieşire* $\eta(t)$:

a) *densitatea de probabilitate de ordinul* I, $W(y)$;
b) *funcţia de autocorelaţie* $B_\eta(\tau)$;
c) *densitatea de probabilitate* $q_\eta(\omega)$.

Soluţie

Densităţile de probabilitate de ordinul I şi II ale semnalului $\xi(t)$ rezultă din relaţiile (3.10):

$$\left.\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right); \\ w_2(x_1, x_2; \tau) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}} \exp\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho(\tau)x_1x_2}{2\sigma^2[1-\rho^2(\tau)]}\right], \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

unde

$$\rho(\tau) = \frac{B_\xi(\tau)}{\sigma^2}.$$

Transformarea $y = ax^2$, reprezentată în figura 3.17 nu are soluţie reală pentru $y < 0$. Pentru $y \geqslant 0$ există două soluţii: $x_{01} = \sqrt{y/a}$ şi $x_{02} = -\sqrt{y/a}$. Deoarece

$$\frac{dx_{01}}{dy} = -\frac{dx_{02}}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{ay}}$$

şi

$$w(x_{01}) = w(x_{02}),$$

conform relaţiei (3.29), rezultă

$$W(y) = \frac{1}{\sqrt{ay}}\, w\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) u(y),$$

unde $u(y)$ este funcţia treaptă unitate

$$u(y) = \begin{cases} 1 & y > 0; \\ 0 & y < 0. \end{cases}$$

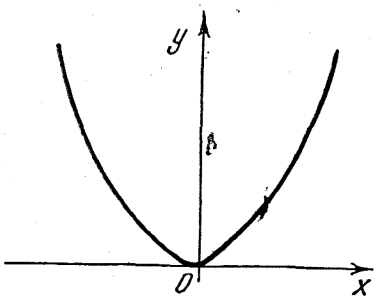


Fig. 3.17. Transformare neliniară $y = ax^2$.

Funcția de autocorelație se calculează conform relației (3.31):

$$B_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a^2 x_1^2 x_2^2 w_2(x_1,\ x_2;\ \tau)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 w(x_1)\,dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 w_2(x_2/x_1;\ \tau)\,dx_2. \qquad (2)$$

Date fiind relațiile (1), rezultă:

$$w_2(x_2/x_1;\ \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-\rho^2(\tau))}} \exp\left[-\frac{[x_2 - \rho(\tau)x_1]^2}{2\sigma^2[1-\rho^2(\tau)]}\right] \qquad (3)$$

reprezentînd expresia densității de probabilitate a unei variabile aleatoare gaussiene (x_2 condiționată de x_1) de valoare medie $\rho(\tau)x_1$ și de dispersie $\sigma^2[1-\rho^2(\tau)]$, iar

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 w_2(x_2/x_1;\ \tau)\,dx_2$$

este valoarea pătratică medie m_2 a acestei variabile aleatoare. După cum se știe (v. rel. (3.3)):

$$m_2 = M_2 + m_1^2,$$

deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 w_2(x_2/x_1;\ \tau)\,dx_2 = \sigma^2[1-\rho^2(\tau)] + \rho^2(\tau)x_1^2.$$

Înlocuind acest rezultat în relația (2), rezultă:

$$B_\eta(\tau) = a^2\sigma^2[1-\rho^2(\tau)]\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 w(x_1)\,dx_1 + a^2\rho^2(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} x_1^4 w(x_1)\,dx_1.$$

La problema 3.16 s-a demonstrat că

$$\int_{-8}^{\infty} x_1^4 w(x_1)\,dx_1 = 3\sigma^4$$

și ca urmare

$$B_\eta(\tau) = a^2\sigma^4[1-\rho^2(\tau)] + 3a^2\rho^2(\tau)\sigma^4.$$

Înlocuind $\rho(\tau)$ cu expresia din (1), rezultă:

$$B_\eta(\tau) = a^2\sigma^4 + 2a^2B_\xi^2(\tau) = a^2B_\xi^2(0) + 2a^2B_\xi^2(\tau).$$

Densitatea spectrală de putere $q_\eta(\omega)$, este, conform teoremei Wiener-Hincin

$$q_\eta(\omega) = \mathfrak{F}\{a^2B_\xi^2(0)\} + \mathfrak{F}\{2a^2B_\xi^2(\tau)\}.$$

Utilizînd teorema convoluției funcțiilor aperiodice rezultă:

$$q_\eta(\omega) = 2\pi a^2 B_\xi(0)\delta(\omega) + 2a^2 q_\xi(\omega) \circledast q_\xi(\omega)$$

PROBLEME PROPUSE

3.18. *Fie semnalul condiționat determinist* $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, *unde* A *și* ω *sînt constante, iar* φ *este o variabilă aleatoare cu distribuție uniformă în intervalul* $(0, \pi/2)$. *Să se calculeze valoarea medie, valoarea pătratică medie și funcția de autocorelație statistică a semnalului. Să se indice dacă semnalul este sau nu este staționar în sens larg.*

3.19. *Să se calculeze și să se reprezinte grafic spectrul de putere al secvenței pseudo-aleatoare din problema* 3.8.

3.20. *Fie funcțiile de autocorelație a două semnale ergodice:*

$$R_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} + C\cos\omega_0\tau;$$

$$R_y(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} + B + C\cos\omega_0\tau.$$

Prin simpla inspectare a acestor funcții de autocorelație, să se determine componența semnalelor $\xi(t)$ *și* $\eta(t)$, *precum și valorile medii statistice de ordinul I și II.*

3.21. *Fie un semnal aleator ergodic cu densitatea spectrală de putere*

$$q(\omega) = \begin{cases} A + C\delta(\omega) & |\omega| \leqslant \omega_0; \\ 0 & |\omega| > \omega_0. \end{cases}$$

Se cere:

a) *să se analizeze componența semnalului aleator;*

b) *să se determine și să se reprezinte grafic funcția de autocorelație;*

c) *să se reprezinte grafic funcția de autocorelație pentru* $\omega_0 \to 0$ *și pentru* $\omega_0 \to \infty$.

3.22. *Să se determine valoarea pătratică medie a unui semnal aleator avînd densitatea spectrală de putere*

$$q(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}.$$

3.23. *Fie filtrul trece-jos din figura* 3.23. *La intrarea filtrului se aplică zgomot alb. Să se determine funcția de autocorelație a semnalului de la ieșirea filtrului,* $B_\eta(\tau)$. *Cum variază aceasta cu constanta* RC *a filtrului?*

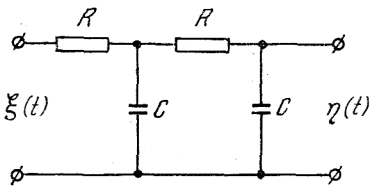


Fig. 3.23. Filtru trece-jos.

3.24. *Fie un filtru adaptat la secvența pseudoaleatoare* 1 1 1 −1 −1 1 −1, *durata unui simbol fiind* T. *Se cere:*

a) *să se reprezinte grafic funcția de pondere a filtrului adaptat;*

b) *să se determine și să se reprezinte grafic răspunsul filtrului la secvența la care este adaptat;*

c) *să se determine și să se reprezinte grafic răspunsul filtrului la semnalul*

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

3.25. *Fie receptorul din problema* 3.15. *Să se determine expresia densității spectrale de putere a zgomotului propriu al sursei și receptorului la intrarea demodulatorului, știind că temperatura sursei* T_1 *este diferită de temperatura receptorului* T_2.

3.26. *Fie un sistem neliniar fără memorie caracterizat de transformarea* $y = a|x|$ $(a > 0)$. *La intrarea sistemului se aplică un semnal aleator staționar gaussian* $\xi(t)$ *de valoare medie nulă. Se cere să se determine pentru semnalul de ieșire* $\eta(t)$:

a) *densitatea de probabilitate de ordinul* I;
b) *valoarea medie și valoarea patratică medie;*
c) *funcția de autocorelație;*
d) *densitatea spectrală de putere.*

Indicație: v. [1].

BIBLIOGRAFIE

1. Spătaru, Al. *Teoria transmisiunii informației*, vol. I (Semnale și perturbații). Ed. Tehnică, București, 1965.
2. Papoulis A. *Probability, random variables and stochastic processes.* Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1965.
3. Lathi, B. P. *Random signals and communication theory.* International. Textbook Company, 1968.

CAPITOLUL 4

DETECȚIA SEMNALELOR ȘI ESTIMAREA PARAMETRILOR

INTRODUCERE TEORETICĂ

A. Detecția semnalelor

• **Schema de principiu** a sistemelor cu decizii pe care le studiem este dată în figura 1.

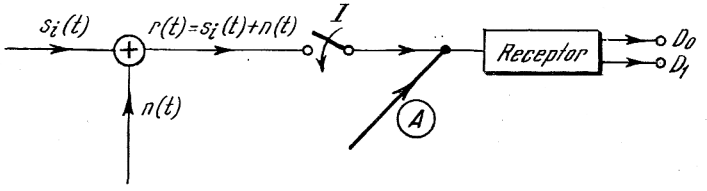


Fig. 1 Schema de principiu a unui sistem de decizii binare.

Sursa de mesaje este o sursă de informație binară, care generează simbolurile 0 și 1 cu probabilitățile P_0 și P_1, respectiv. Pentru transmisiune, celor două simboluri 0 și 1 li se asociază două forme de undă distincte, $s_0(t)$ și $s_1(t)$, respectiv.

Semnalele purtătoare de informație, $s_0(t)$ și $s_1(t)$, sînt transmise pe un *canal* pe care apar perturbații aditive. Zgomotul aditiv $n(t)$ îl vom presupune gaussian, staționar, de valoare medie statistică nulă și densitate spectrală de putere $q(f)$ dată.

La *recepție* apare semnalul $r(t)$ reprezentînd semnalul util înecat în zgomot. Asupra lui $r(t)$ se fac observații discrete sau continue (cum vom vedea mai departe) și pe baza acestor observații se ia decizia că a fost transmis semnalul $s_0(t)$ sau $s_1(t)$.

Observatorul situat la recepție nu știe care anume semnal a fost transmis, $s_0(t)$ sau $s_1(t)$, dar știe că s-a transmis cu siguranță unul dintre acestea și cunoaște atît statistica zgomotului $n(t)$, cît și formele de undă $s_0(t)$ și $s_1(t)$, probabilitățile P_0 și P_1, precum și intervalul de timp de emisie, pe care îl vom considera $[0, T]$.

• Există următoarele două **cazuri de recepționare** (fig. 1):

— întrerupătorul I se închide la momente de timp discrete, $t_1, t_2, \ldots, t_N$, în intervalul de emisiune $[0, T]$:

— întrerupătorul I stă închis pe toată durata $[0, T]$ de emisiune a semnalelor $s_i(t)$; $i = 0, 1$.

• *Observarea la momente de timp discrete a unor variabile aleatoare.* Observațiile făcute la recepție sînt de tipul:

$$r(t_j) = s_i(t_j) + n(t_j) \longleftrightarrow r_j = s_{ij} + n_j, \tag{4.1}$$

unde

$$i = 0,1; \quad j = 1, 2, \ldots, N;$$
$$r_j = r(t_j); \; s_{ij} = s_i(t_j); \; n_j = n(t_j).$$

Evident, într-o măsurare particulară i este fix, iar perturbația este o realizare particulară a zgomotului $n(t)$.

Privite pe ansamblul măsurărilor, $n_j (j = 1, 2, ..., N)$ din relația (4.1) sînt variabile aleatoare definite pe spațiul eșantioanelor Ω asociat zgomotului. Dacă se face în plus ipoteza că aceste variabile aleatoare $n_j (j = 1, 2, ..., N)$ sînt necorelate, atunci putem scrie:

$$\left.\begin{aligned} p_{n_1 \dots n_N}(n_1, \dots, n_N) &= \prod_{j=1}^{N} p(n_j) \\ p_{n_j}(n_j) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n_j^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

unde

$p_{n_1 \dots n_N}(n_1, \dots, n_N)$ este densitatea de probabilitate asociată grupului de variabile aleatoare $(n_1, n_2, \dots, n_N)$;

σ^2 — dispersia zgomotului $n(t)$.

Ținînd seama de faptul că sursa de informație și zgomotul sînt statistic independente, putem scrie următoarea expresie a densității de probabilitate condiționată a grupului de variabile aleatoare $(r_1, r_2, \dots, r_N)$:

$$p_{r_1 \dots r_N}(r_1, \dots, r_N / S_i) = p_{n_1 \dots n_N}(r_1 - s_{i1}, \dots, r_N - s_{iN}), \tag{4.3}$$

unde:

$p_{r_1 \dots r_N}(r_1, \dots, r_N / S_i)$ este densitatea de probabilitate asociată grupului de variabile aleatoare $(r_1, r_2, \dots, r_N)$, condiționată de transmiterea semnalului $s_i(t)$;

s_{ij} — notația din relația (4.1).

Observatorul recepționează, deci, grupul de numere reprezentînd valorile măsurate ale variabilelor aleatoare $(r_1, r_2, \dots, r_N)$ și ia decizia că s-a transmis $s_0(t)$ sau $s_1(t)$.

Evident, există o anumită probabilitate ca decizia luată să fie greșită. Se asociază un cost pentru fiecare decizie eronată, conform tabelului următor:

Decizia luată \ Ipoteza adevărată	H_0	H_1
D_0	C_{00}	C_{01}
D_1	C_{10}	C_{11}

unde:

H_i este ipoteza că s-a transmis $s_i(t)$;

D_i — decizia prin care acceptă H_i;

C_{ij} — costul în cazul în care semnalul transmis $s_j(t)$ este interpretat drept semnalul $s_i(t)$.

În general $C_{00} = C_{11} = 0$; acesta este cazul pe care îl vom considera.

Există o infinitate de *posibilități de alegere a unui criteriu de decizie*. Performanțele receptorului (construit conform criteriului ales) sînt apreciate prin numerele $P(D_i/S_j)$, $P(\varepsilon)$, $\bar{C}$, unde s-a notat:

$P(D_i/S_j)$ — probabilitatea de a lua decizia D_i, cînd s-a transmis

$s_j(t)$, unde $i, j = 0, 1$;

$P(\varepsilon)$ — probabilitatea erorii de decizie, deci:

$$P(\varepsilon) = P_0 P(D_1/S_0) + P_1 P(D_0/S_1);$$

$\bar{C}$ — costul mediu (riscul de decizie)

$$\bar{C} = C_{10} P_0 P(D_1/S_0) + C_{01} P_1 P(D_0/S_1).$$

Un criteriu de deosebit interes teoretic și practic este cel care duce la un cost mediu minim (numit *criteriul Bayes*). Dacă într-o măsurare particulară observațiile făcute sînt $r_1, r_2, \ldots, r_N$, atunci receptorul Bayes procedează astfel:

— acceptă H_0, dacă

$$\frac{p_{r_1 \ldots r_N}(r_1, \ldots, r_N/ S_1)}{p_{r_1 \ldots r_N}(r_1, \ldots, r_N/ S_0)} < K = \frac{P_0 C_{10}}{P_1 C_{01}};$$

— acceptă H_1 în caz contrar.

Relația Bayes se scrie compact:

$$\frac{p_{r_1 \ldots r_N}(r_1, \ldots, r_N/ S_1)}{p_{r_1 \ldots r_N}(r_1, \ldots, r_N/ S_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} K. \tag{4.4}$$

Dacă aplicăm relația (4.4) pentru cazul în care variabilele aleatoare $n_1, n_2, \ldots, n_N$ sînt necorelate, rezultă următoarea expresie a relației de decizie Bayes (v. rel. (4.2) și (4.3)):

$$\sum_{j=1}^{N} r_j (s_{1j} - s_{0j}) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} \sigma^2 \ln K + \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{N} s_{1j}^2 - \sum_{j=1}^{N} s_{0j}^2\right]. \tag{4.5}$$

• *Observații continue.* Observațiile sînt de tipul:

$$r(t) = s_i(t) + n(t); \quad i = 0,1; \; t \in [0, T].$$

În acest caz, facem în plus ipoteza că zgomotul este alb, adică are densitatea spectrală de putere $q(f)$ din figura 2.

Definițiile privind deciziile D_i, ipotezele H_i, costurile C_{ij}, precum și valorile $P(D_i/S_j)$, $P(\varepsilon)$ și $\bar{C}$ sînt aceleași de la cazul prezentat anterior.

Relația de decizie care conduce la un cost mediu minim este următoarea (numită *tot relația Bayes*):

$$\left.\begin{aligned} r_1 &\underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} K_1 = \frac{1}{\sqrt{E_S}}\left[\frac{N_0}{2} \ln K + \frac{1}{2} E_1 - \frac{1}{2} E_0\right] \\ r_1 &= \frac{1}{\sqrt{E_S}} \int_0^T r(t)[s_1(t) - s_0(t)]\,dt \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

unde:

$r(t)$ este semnalul recepționat într-o singură înregistrare făcută în intervalul $[0, T]$;

$$K = \frac{P_0 C_{10}}{P_1 C_{01}};$$

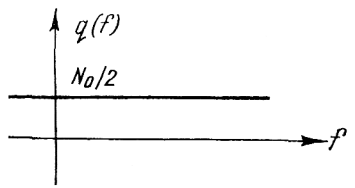


Fig. 2. Densitatea spectrală de putere a zgomotului alb.

E_i — energia semnalului $s_i(t)$, deci

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t)\mathrm{d}t; \quad i = 0,1;$$

E_s — energia semnalului diferență, $s(t)$, deci:

$$E_s = \int_0^T s^2(t)\mathrm{d}t; \quad s(t) = s_1(t) - s_0(t) \cdot$$

Rezultă că în luarea deciziilor conform relației Bayes (4.6) nu interesează forma de undă $r(t)$ a semnalului recepționat, ci doar coeficientul r_1 (exprimat tot în relația (4.6)).

Putem scrie:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= s_{i1} + n_1 \\ s_{i1} &= \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T s_i(t)s(t)\mathrm{d}t; \quad i = 0, 1 \\ n_1 &= \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T n(t)s(t)\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Pentru o măsurare particulară, n_1 și r_1 sînt valori bine precizate. Privite pe ansamblul măsurărilor, n_1 și r_1 din relațiile (4.7) sînt variabile aleatoare.

Dat fiind tipul de zgomot considerat (gaussian, alb, de valoare medie nulă), n_1 este o variabilă aleatoare gaussiană cu următoarea expresie a densității de probabilitate:

$$p_{n_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{N_0}}. \tag{4.8}$$

Sursa de informație și zgomotul fiind statistic independente, densitățile de probabilitate condiționată asociate variabilei aleatoare r_1 sînt:

$$p_{r_1}(x/S_i) = p_{n_1}(x - s_{i1}) \tag{4.9}$$

unde s_{i1} sînt notațiile din relația (4.7).

B. Estimarea parametrilor semnalului

Estimarea parametrilor semnalului se poate considera că este generalizarea problemei de detecție pentru o infinitate de ipoteze. Semnalul recepționat în intervalul de timp $[0, T]$ este

$$r(t) = s(t, \theta) + n(t), \tag{4.10}$$

unde $s(t,\theta)$ este semnalul transmis, presupus cunoscut cu excepția parametrului θ (scalar sau vectorial) care poate lua valori într-un interval, iar $n(t)$ este zgomot gaussian staționar, de medie 0 și funcție de autocorelație cunoscută, $R_n(t_2 - t_1)$. *Parametrul θ conține informația emisă de sursă.* Valoarea sa este necunos-

cută, iar sarcina receptorului este să o estimeze cît mai corect. (Cînd θ este parametru vectorial se poate cere estimarea unei singure componente a lui).

● În cazul cînd **θ este variabilă aleatoare,** se presupune cunoscută și densitatea sa de probabilitate, $p(\theta)$.

Fie $\hat{\theta}$ estimatul lui θ obținut din $r(t)$ printr-un procedeu oarecare determinat. $\hat{\theta}$ este o variabilă aleatoare ce poate lua valori în domeniul de valori ale lui θ. Diferența

$$\varepsilon_\theta = \theta - \hat{\theta} \tag{4.11}$$

este eroarea de estimare, a cărei importanță o luăm în considerare printr-o *funcție cost* $C(\varepsilon_0)$. Această funcție înlocuiește costurile C_{ij} din cazul problemelor de decizie. Estimatele bayesiene se obțin din condiția de risc minim. Riscul este costul mediu (mediere după $r(t)$ și după θ). Ca să lucrăm cu repartiții în spații finit dimensionale, se înlocuiește semnalul recepționat, $r(t)$, $t \in [0, T]$, cu vectorul eșantioanelor sale, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N)$.

Funcțiile cost cel mai des utilizate sînt *funcția pătratică, funcția modul (normă)* și *funcția prag*:

$$C(\varepsilon_\theta) = \| \varepsilon_\theta \|_s^2; \tag{4.12}$$

$$C(\varepsilon_\theta) = \| \varepsilon_\theta \|_s; \tag{4.13}$$

$$C(\varepsilon_\theta) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \| \varepsilon_\theta \|_s < \dfrac{E}{2} \\ 1 & \text{pentru } \| \varepsilon_\theta \|_s \geqslant \dfrac{E}{2} \end{cases} \tag{4.14}$$

Estimatul bayesian corespunzător funcției (4.12) este tocmai valoarea medie a lui θ condiționată de $\mathbf{r}$ (media corespunzătoare densității aposteriori):

$$\hat{\theta}_p(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta p(\theta/\mathbf{r}) d\theta. \tag{4.15}$$

Cel corespunzător funcției (4.13) este mediana densității aposteriori, iar cel corespunzător funcției (4.14) este maximul densității aposteriori dacă se consideră E arbitrar de mic diferit de zero; notăm acest maxim cu $\hat{\theta}_{map}$. Dacă densitatea aposteriori este de clasă C^1 și maximul este în interiorul domeniului de valori admise pentru θ, atunci $\hat{\theta}_{map}$ satisface ecuația:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} p(\theta/\mathbf{r})\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0. \tag{4.16}$$

Deoarece

$$p(\theta/\mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r}/\theta)p(\theta)}{p(\mathbf{r})},$$

iar logaritmul este funcție monotonă, relația (4.16) este echivalentă cu:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln[p(\mathbf{r}/\theta)] + \frac{\partial}{\partial \theta} \ln[p(\theta)] = 0. \tag{4.17}$$

● **Dacă parametrul necunoscut θ nu poate fi tratat drept variabilă aleatoare,** în calculul riscului nu mai are sens medierea după θ. O minimizare a erorii medii pătratice

$$R(\theta) = \int [\hat{\theta}(\mathbf{r}) - \theta]^2 p(\mathbf{r}/\theta)\, d\mathbf{r}$$

nu dă decît soluția $\hat{\theta}(\mathbf{r}) = \theta$ (valoarea adevărată, necunoscută), soluție lipsită de sens pentru problemă căci tocmai θ este valoarea pe care dorim s-o estimăm.

Calitatea estimării se măsoară cu media lui θ(r) (după **r** și cu dispersia sa. Dacă

$$\overline{\hat{\theta}(\mathbf{r})} - \theta = 0 \qquad \text{pentru orice } \theta, \tag{4.18}$$

atunci *estimatul* se numește *nedeplasat.* Sînt de dorit estimate nedeplasate și cu dispersie cît mai mică, dar nu există procedee generale de a găsi astfel de estimate.

Un estimat utilizat este *estimatul de maximă plauzibilitate,* $\hat{\theta}_{mp}$, adică θ care maximizează $p(\mathbf{r}/\theta)$ pentru **r** recepționat (ca funcție de θ, $p(\mathbf{r}/\theta)$ se numește funcție plauzibilitate). Dacă $p(\mathbf{r}/\theta)$ este de clasă C^1 și dacă maximul este în interiorul domeniului de valori admise pentru θ, atunci estimatul de maximă plauzibilitate satisface ecuația:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(\mathbf{r}/\theta)] \Big|_{\theta = \hat{\theta}_{mp}} = 0. \tag{4.19}$$

Se poate considera că (4.19) rezultă din (4.17) cînd termenul al doilea (informația apriori asupra lui θ) se anulează.

Pentru orice estimat nedeplasat este satisfăcută *inegalitatea Cramer-Rao:*

$$\overline{[\hat{\theta}_{mp}(\mathbf{r}) - \theta]^2} \geqslant \frac{1}{\left[\dfrac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(\mathbf{r}/\theta)]^2\right]},$$

adică dispersia sa este limitată inferior. *Estimatele* pentru care inegalitatea Cramer-Rao este satisfăcută la limită (este egalitate) se numesc *eficiente.* Se arată că dacă există un estimat eficient, atunci acela este estimatul de maximă plauzibilitate, $\hat{\theta}_{mp}$. Dar se poate să nu existe estimate eficiente și atunci nu putem spune cît de bun este $\hat{\theta}_{mp}$ fără o analiză pe cazul particular respectiv.

PROBLEME REZOLVATE

4.1. *Să se verifice că relația de decizie Bayes (4.4) conduce la un cost mediu minim. Se va considera cazul unei singure observații la momentul* t_1 *(deci* $N = 1$*). Se presupune că zgomotul este aditiv, gaussian, staționar, de valoare medie statistică nulă și dispersie finită,* σ^2*. Să se deducă relația concretă de lucru pentru receptorul Bayes.*

Soluție

Sistemul este cel din figura 1 cu întrerupătorul I închis doar la momentul $t = t_1$. În punctul A al schemei, rezultatele măsurărilor au expresia:

$$r(t_1) = s_i(t_1) + n(t_1) \longleftrightarrow r_1 = s_{i1} + n_1,$$

unde:

$i = 0,1$;

$n_1 = n(t_1)$ este o variabilă aleatoare rezultată din eșantionarea zgomotului la momentul t_1.

Evident, într-o măsurare particulară i este fix, iar n_1 este un număr rezultat din eșantionarea unei realizări particulare a zgomotului.

Spațiul observațiilor (mulțimea valorilor posibile r_1) este deci axa reală R. Receptorul lucrează conform criteriului de decizie ales și ia decizia pe baza unei singure măsurări a variabilei aleatoare r_1. Costul mediu de decizie, pentru un criteriu oarecare ales, este:

$$\bar{C} = C_{01}P_1P(D_0 / S_1) + C_{10}P_0P(D_1 / S_0)$$

unde D_i, $P(D_i/S_j)$ și C_{ij} au semnificațiile din introducerea teoretică.

Receptorul realizează pe axa R o partiție în domeniile Δ_0 și Δ_1, unde Δ_i conține toate valorile r_1 pentru care decizia luată este D_i. Deci, într-o măsurare particulară, receptorul înregistrează valoarea obținută r_1 și constată în care domeniu, Δ_0 sau Δ_1, se află aceasta, apoi ia decizia corespunzătoare.

Vom nota prin $\bar{C}$ costul mediu de decizie în cazul unui criteriu oarecare, dar diferit de criteriul Bayes, și prin $\bar{C}_B$ costul mediu de decizie în cazul criteriului Bayes (corespunzător rel. (4.4)). Urmărim să arătăm că diferența $\bar{C} - \bar{C}_B$ este un număr pozitiv. Specificăm prin indicele B toate notațiile referitoare la criteriul Bayes:

Putem scrie

$$\Delta_0 \cup \Delta_1 = R; \quad \Delta_0 \cap \Delta_1 = \Phi;$$

$$\Delta_{0B} \cup \Delta_{1B} = R; \quad \Delta_{0B} \cap \Delta_{1B} = \Phi,$$

unde Φ este mulțimea vidă.

$$P(D_i / S_j) = \int_{\Delta_i} p_{r_1}(r_1 / S_j)\mathrm{d}r_1.$$

Putem scrie următoarele relații între submulțimile lui R induse de cele două partiții $\{\Delta_0, \Delta_1\}$ și $\{\Delta_{0B}, \Delta_{1B}\}$ (fig. 4.1):

$$\Delta_1 = (\Delta_1 \cap \Delta_{0B}) \cup (\Delta_1 \cap \Delta_{1B});$$

$$\Delta_{1B} = (\Delta_{1B} \cap \Delta_0) \cup (\Delta_{1B} \cap \Delta_1);$$

$$\Delta_0 = (\Delta_0 \cap \Delta_{0B}) \cup (\Delta_0 \cap \Delta_{1B});$$
$$\Delta_{0B} = (\Delta_{0B} \cap \Delta_0) \cup (\Delta_{0B} \cap \Delta_1).$$

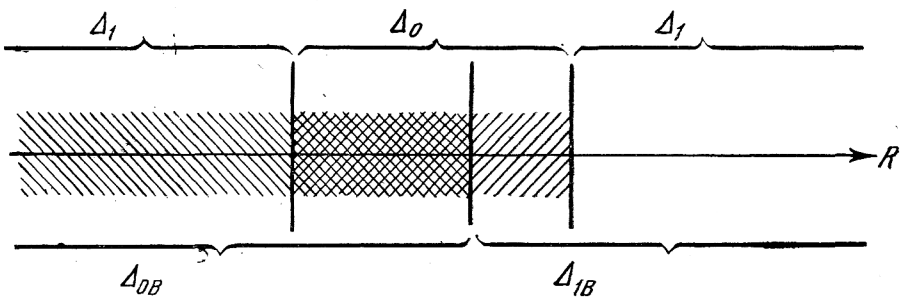


Fig. 4.1. Identificarea regiunilor de decizie pentru două strategii de decizie diferite.

Rezultă:

$$\bar{C} - \bar{C}_B = \int_{\Delta_1 \cap \Delta_{0B}} [C_{10}P_0 p_{r_1}(r_1/S_0) - C_{01}P_1 p_{r_1}(r_1/S_1)]\mathrm{d}r_1 +$$

$$+ \int_{\Delta_0 \cap \Delta_{1B}} [C_{01}P_1 p_{r_1}(r_1 / S_1) - C_{10}P_0 p_{r_1}(r_1 / S_0)]\mathrm{d}r_1. \qquad (1)$$

Criteriul Bayes se exprimă astfel (rel. 4.4): dacă valoarea măsurată a variabilei aleatoare r_1 este x, atunci se ia decizia D_0 dacă:

$$P_1C_{01}p_{r_1}(x / S_1) < P_0C_{10}p_{r_1}(x / S_0), \qquad (2)$$

iar în caz contrar se ia decizia D_1.

Înlocuind relația (2) în (1) rezultă:

$$\bar{C} - \bar{C}_B \geqslant 0, \text{ q.e.d.}$$

Pentru sistemul de transmisiune considerat rezultă (v. rel. (4.2) și (4.3)) că receptorul Bayes:

— decide D_0 dacă:

$$P_1C_{01}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(r_1-s_{11})^2}{2\sigma^2}} < P_0C_{10}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(r_1-s_{01})^2}{2\sigma^2}};$$

— decide D_1 în caz contrar.

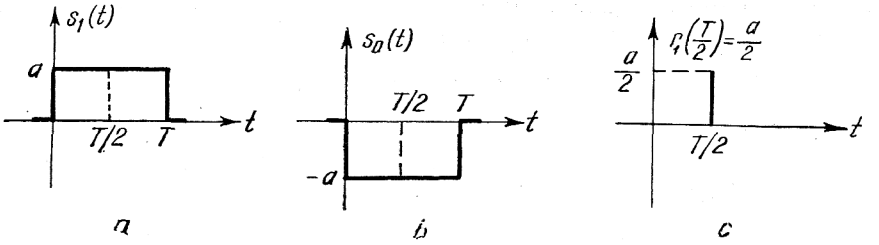
Scrisă, compact, relația de decizie Bayes este:

$$r_1(s_{11} - s_{01}) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} \sigma^2 \ln\frac{C_{10}P_0}{C_{01}P_1} + \frac{1}{2}(s_{11}^2 - s_{01}^2),$$

unde r_1 este eșantionul măsurat la momentul t_1, din semnalul $r(t)$ recepționat.

4.2. *Se consideră sistemul de transmisiune din problema 4.1. Receptorul este de tip Bayes (cost mediu minim). Semnalele purtătoare de informație,* $s_1(t)$ *și* $s_0(t)$, *sînt reprezentate în figurile 4.2, a respectiv* b.

Se presupun costuri egale $C_{01} = C_{10}$ *și semnale de probabilități egale,* $P_0 = P_1$.



a b c

Fig. 4.2. Semnalele $s_i(t)$; $i = 0,1$ și eșantionul r_1 recepționat la $t_1 = \frac{T}{2}$.

a) *Observatorul măsoară eșantionul* $r_1 = \frac{a}{2}$ *la* $t_1 = \frac{T}{2}$ *(fig.* 4.2,c). *Ce decizie ia?*

b) *Care este probabilitatea ca decizia luată la „a" să fie greșită? Se va evalua pentru diferite valori ale parametrului* $\gamma = \frac{2a}{\sigma}$, *adică pentru* $\gamma = 1, 2, ..., 10$, *unde* σ^2 *este dispersia zgomotului.*

Soluție

a) Schema este cea din figura 1, cu întrerupătorul I închis doar la momentul $t_1 = \frac{T}{2}$.

Detectorul lucrează conform relației (4.5) adică:

$$r_1(s_{11} - s_{01}) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} K_1 = \sigma^2 \ln K + \frac{1}{2}(s_{11}^2 - s_{01}^2).$$

Pentru cazul considerat rezultă:

$$K = 1 \quad ; \quad s_{11} = -s_{01} = a.$$

Deci, relația de decizie este:

$$r_1 \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} 0.$$

Observația făcută la $t_1 = \frac{T}{2}$ este $r_1 = \frac{a}{2}$ și deci detectorul acceptă ipoteza H_1 (ia decizia D_1).

b) Care este probabilitatea ca ipoteza adevărată să fie H_0, cînd s-a recepționat valoarea $r_1 = \frac{a}{2}$? Notăm această probabilitate

$$P\left(S_0 / r_1 = \frac{a}{2}\right).$$

$P\left(S_0 / r_1 = \frac{a}{2}\right)$ nu se poate calcula folosind definiția probabilităților condiționate, deoarece evenimentul care condiționează este de probabilitate zero. Este

nevoie de o definiție a probabilității „a posteriori" a semnalului $s_0(t)$, dată fiind valoarea $r_1 = x_0$. Această probabilitate „a posteriori" se definește astfel:

$$P(S_0 / r_1 = x_0) \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0} P(S_0 / x_0 \leqslant r_1 \leqslant x_0 + \varepsilon).$$

Rezultă:

$$P(S_0 / r_1 = x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_0 P(x_0 \leqslant r_1 \leqslant x_0 + \varepsilon / S_0)}{P(x_0 \leqslant r_1 \leqslant x_0 + \varepsilon)}.$$

Deci

$$P(S_0 / r_1 = x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_0 \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} p_{r_1}(x \mid S_0) \mathrm{d}x}{\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} p_{r_1}(x) \mathrm{d}x} = \frac{P_0 p_{r_1}(x_0 / S_0)}{p_{r_1}(x_0)},$$

unde

$$p_{r_1}(x_0) = P_0 p_{r_1}(x_0 / S_0) + P_1 p_{r_1}(x_0 / S_1).$$

Rezultă:

$$P(S_0 / r_1 = x_0) = \left[1 + \frac{P_1 p_{r_1}(x_0 / S_1)}{P_0 p_{r_1}(x_0 / S_0)}\right]^{-1}.$$

Ținînd seama de relațiile (4.2) și (4.3), rezultă:

$$\frac{p_{r_1}(x_0 / S_1)}{p_{r_1}(x_0 / S_0)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}[2x_0(s_{01}-s_{11})+s_{11}^2-s_{01}^2]}$$

Pentru exemplul ales:

$$P_0 = P_1 \quad ; \quad s_{11} = -s_{01} = a.$$

Deci:

$$P(S_0 / r_1 = x_0) = \left[1 + \mathrm{e}^{\frac{2ax_0}{\sigma^2}}\right]^{-1}.$$

$$\gamma = \frac{2a}{\sigma} \to P\left(S_0 / r_1 = \frac{a}{2}\right) = \left[1 + \mathrm{e}^{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}\right]^{-1}.$$

Calculul numeric:

γ	$P\left(S_0 / r_1 = \frac{a}{2}\right)$
1	0,437823
2	0,268941
3	0,095349
4	0,017986
5	$1{,}9 \cdot 10^{-3}$
6	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$
7	$4{,}8 \cdot 10^{-6}$
8	$1{,}1 \cdot 10^{-7}$
9	$1{,}6 \cdot 10^{-9}$
10	$1{,}4 \cdot 10^{-11}$

4.3. *Se consideră sistemul de transmisiune binară cu decizii din problema 4.1, unde receptorul este de tip Bayes. Să se determine probabilitatea erorii receptorului (eroarea pe ansamblu, cînd semnalul transmis poate fi oricare dintre cele două posibile,* $s_0(t)$ *și* $s_1(t)$*), în funcție de parametrul* γ. *Se va face calculul numeric pentru* $\gamma = 1, 2, \ldots, 5$.

Se presupune: $C_{01} = C_{10}$; $P_0 = P_1$; $\gamma = \frac{d}{\sigma}$; $d = s_{11} - s_{01}$,

unde σ^2 *este dispersia zgomotului canalului.*

Soluție

Probabilitatea erorii de decizie condiționată de transmiterea semnalului $s_j(t)$ este:

$$P(D_i / S_j) = P_r\{r_1 \in \Delta_i / S_j\} = \int_{\Delta_i} p_{r_1}(x / S_j)\, dx,$$

unde s-a notat prin Δ_i domeniul de pe axa reală R, care conține mulțimea valorilor variabilei aleatoare r_1 pentru care decizia luată este D_i.

Criteriul de decizie considerat fiind Bayes, rezultă că decizia luată este D_0 (deci acceptă H_0) dacă valoarea măsurată x a variabilei r_1 satisface:

$$x(s_{11} - s_{01}) < K_1;$$

$$K_1 = \sigma^2 \ln K + \frac{1}{2}(s_{11}^2 - s_{01}^2);\quad K = \frac{C_{10}P_0}{C_{01}P_1}.$$

În caz contrar, decizia este D_1 (v. rel. (4.5)).

Din datele problemei rezultă $K = 1$ și deci:

$$x \underset{H}{\overset{H_0}{\lessgtr}} \frac{1}{2}(s_{11} + s_{01}).$$

Dar:

$$p_{r_1}(x / S_j) = p_{n_1}(x - s_{j1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-s_{j1})^2}{2\sigma^2}}.$$

Rezultă

$$P(D_0 / S_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{d}{2\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\gamma}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Similar:

$$P(D_1 / S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{d}{2\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\gamma}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

cu

$$\gamma = \frac{d}{\sigma}.$$

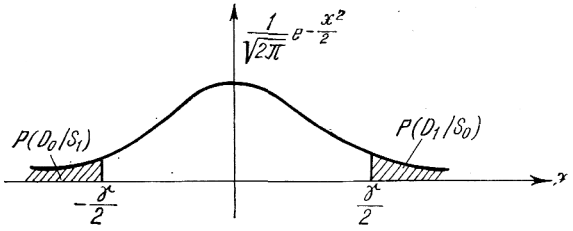


Fig. 4.3. Determinarea grafică a probabilităților erorii de decizie condiționate.

Din figura 4.3 se vede că probabilitățile erorii condiționate scad cu creșterea lui γ (ariile haşurate).

Probabilitatea erorii de decizie $P(\varepsilon)$ este:

$$P(\varepsilon) = P_1 P(D_0 / S_1) + P_0 P(D_1 / S_0).$$

Pentru cazul considerat rezultă

$$P(D_0 / S_1) = P(D_1 / S_0) = P(\varepsilon).$$

Calculul numeric:

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\gamma}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} - F\left(\frac{\gamma}{2}\right);$$

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Funcția $F(z)$ este tabelată în [1], deci pentru $\gamma = 1, 2, ..., 5$ rezultă:

γ	$P(\varepsilon) = \frac{1}{2} - F\left(\frac{\gamma}{2}\right)$
1	0,30854
2	0,15866
3	0,06681
4	0,02215
5	0,00621

4.4. *Sursa emite semnalele* $s_0(t)$ *și* $s_1(t)$ *din figura 4.4, a cu probabilități egale. Transmisiunea se face pe un canal cu zgomot aditiv, gaussian, alb, de valoare medie statistică nulă și densitate spectrală de putere dată,* $\frac{N_0}{2}$. *Observatorul recepționează în intervalul de timp* [0, T] *semnalul transmis perturbat de zgomot și ia decizii conform criteriului Bayes. Se presupun costuri egale* $C_{01} = C_{10}$.

a) *Observatorul înregistrează semnalul* r(t) *din figura 4.4,*a. *Ce decizie ia?*

b) *Să se implementeze receptorul.*

Soluție

a) Sistemul de transmisiune este cel din figura 1 pentru I închis în intervalul [0, T]. Receptorul ia decizii conform relației (4.6). Pentru datele problemei rezultă:

$$K = 1 \rightarrow \ln K = 0;$$

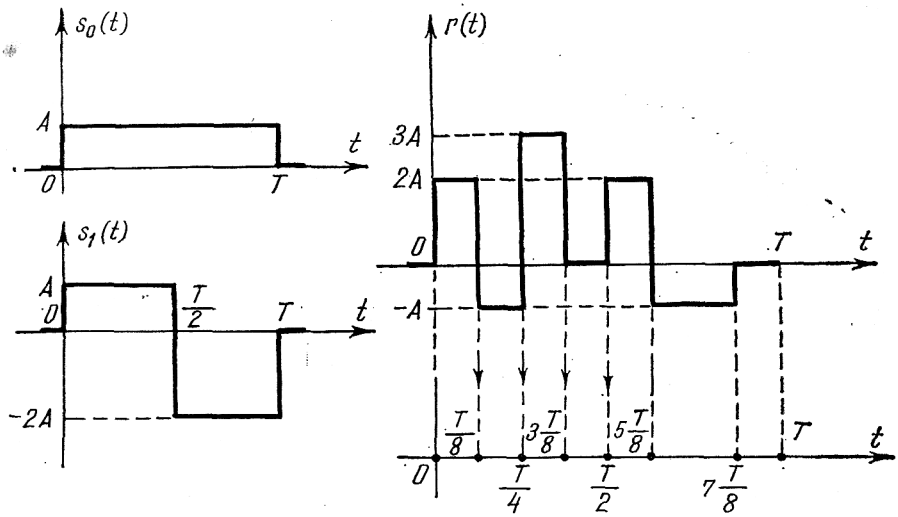


Fig. 4.4,*a*. Semnalele $s_i(t)$; $i = 0,1$ și $r(t)$ pentru problema 4.4.

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t)\mathrm{d}t = \frac{5}{2} A^2 T;$$

$$E_0 = \int_0^T s_0^2(t)\mathrm{d}t = A^2 T;$$

$$E_s = \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 \,\mathrm{d}t = \frac{9}{2} A^2 T.$$

Deci, relația de decizie devine:

$$r_1 \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} \frac{1}{2} A \sqrt{\frac{T}{2}}, \tag{1}$$

unde

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T r(t)[s_1(t) - s_0(t)] \,\mathrm{d}t.$$

Pentru înregistrarea particulară $r(t)$ din figura 4.4,*a* observatorul evaluează coeficientul r_1:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T r(t)[s_1(t) - s_0(t)] \,\mathrm{d}t = 0$$

și ia decizia D_0 (acceptă ipoteza H_0).

○ **Se observă că** în acest caz, în luarea deciziilor nu contează valoarea densității spectrale de putere a zgomotului.

b) Pentru implementarea receptorului, transcriem întîi relația de decizie (1) sub forma:

$$\int_0^T r(t)[s_1(t) - s_0(t)] \,\mathrm{d}t \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} \frac{3}{4} A^2 T. \tag{2}$$

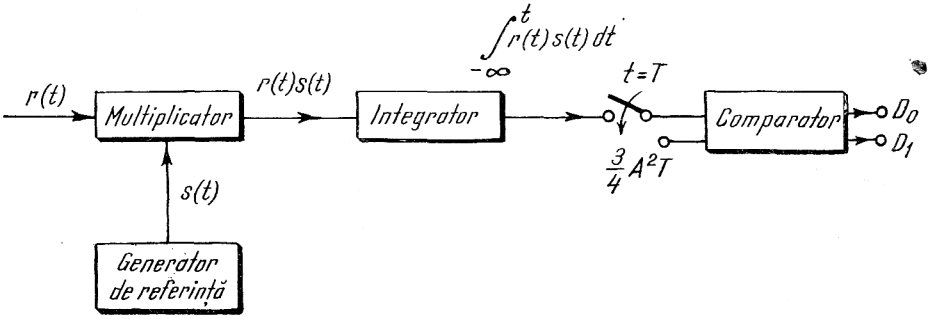


Fig. 4.4,*b*. Receptor cu multiplicator și integrator.

Relația (2) ne sugerează următoarele variante pentru implementare: *receptor cu multiplicator și integrator* (fig. 4.4, *b*); *receptor cu filtru adapta* (fig. 4.4, *c*).

În figura 4.4, *b* am presupus că există o sincronizare între receptor și emițător, exprimată prin generatorul de referință (generează semnalul $s(t)$ în intervalul de timp de emisie, $[0,T]$).

Al doilea mod de implementare a receptorului rezultă din inspectarea următoarelor două relații:

— relația $\int_0^T r(t)\,[s_1(t) - s_0(t)]\,dt$;

— relația intrare-ieșire a unui sistem liniar invariant în timp, cu funcția de pondere $h(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

unde $x(t)$ aparține spațiului de intrare, iar $y(t)$ aparține spațiului de ieșire.

Pentru un filtru fizic realizabil impunem condiția:

$$h(t) = 0 \qquad \text{pentru} \qquad t < 0.$$

Schema receptorului este dată în figura 4.4,*c*.

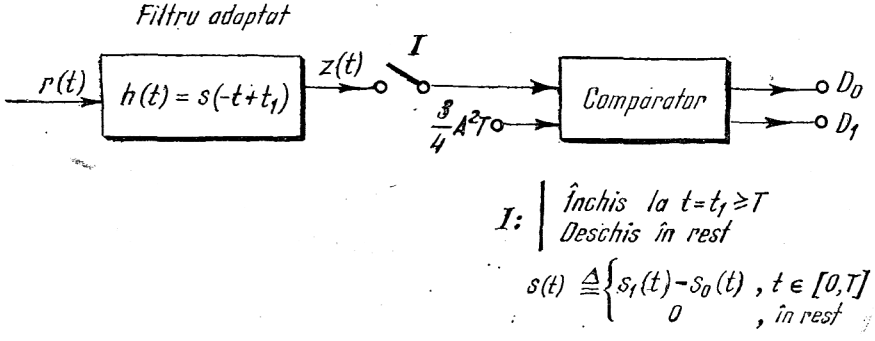


Fig. 4.4,*c*. Receptor cu filtru adaptat.

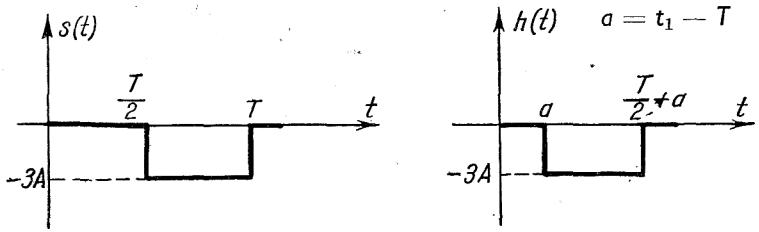


Fig. 4.4,*d*. Semnalul diferență $s(t)$ și funcția pondere $h(t)$ a filtrului adaptat corespunzător.

Rezultă:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)s(-t + \tau + t_1)\,d\tau;$$

$$z(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)s(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{T} r(\tau)s(\tau)\,d\tau.$$

Din figura 4.4, *d* rezultă că sistemul liniar cu funcția de pondere $h(t)$ este un filtru adaptat pentru semnalul $s(t)$, [1]. Acest filtru este fizic realizabil pentru $t_1 \geqslant T$.

Și în figura 4.4, *c* am presupus că există o sincronizare între receptor și emițător, exprimată prin alegerea momentului de eșantionare la $t = t_1$. Dacă intervalul de timp în care se face emisia este $(t_0, t_0 + T)$, atunci eșantionarea în figura 4.4, *c* se face la $t = t_0 + t_1$.

4.5. *Care este probabilitatea ca decizia luată la punctul* a *al problemei 4.4 să fie greșită?*

Să se efectueze calculul numeric pentru cazul cînd semnalele $s_0(t)$ *și* $s_1(t)$ *au energia medie statistică,* $\overline{E}$, *în intervalul* $[0, T]$ *astfel încît* $\overline{E} = 7\frac{N_0}{2}$, *unde:*

$$\overline{E} \triangleq P_0 \int_0^T s_0^2(t)\,dt + P_1 \int_0^T s_1^2(t)\,dt;$$

$\frac{N_0}{2}$ *este densitatea spectrală de putere a zgomotului.*

Soluție

Pentru realizarea particulară $r(t)$ din figura 4.4, *a.*, observatorul ia decizia D_0 (acceptă ipoteza H_0). Care este probabilitatea ca această decizie să fie greșită?

Deci ne interesează probabilitatea de a se fi transmis semnalul $s_1(t)$, dat fiind coeficientul $r_1 = 0$ (v. soluția la problema 4.4, *a*). Fie această probabilitate $P(S_1/r_1 = 0)$. Nu putem calcula $P(S_1/r_1 = 0)$ folosind direct definiția probabilității condiționate, deoarece evenimentul care condiționează este de probabilitate zero (v. problema 4.2). Este nevoie de o definiție a probabilității semnalului $s_1(t)$, dată fiind valoarea măsurată x_0 a variabilei aleatoare r_1. Această definiție este:

$$P(S_1/r_1 = x_0) \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0} P\{S_1/x_0 \leqslant r_1 \leqslant x_0 + \varepsilon\}.$$

Rezultă:

$$P(S_1/r_1 = x_0) = \frac{P_1 p_{r_1}(x_0/S_1)}{p_{r_1}(x_0)}; \tag{1}$$

$$p_{r_1}(x_0/S_1) = p_{n_1}(x_0 - s_{11}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(x_0 - s_{11})^2}{N_0}};$$

$$p_{r_1}(x_0/S_0) = p_{n_1}(x_0 - s_{01}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(x_0 - s_{01})^2}{N_0}};$$

$$p_{r_1}(x_0) = p_{r_1}(x_0/S_0)P_0 + p_{r_1}(x_0/S_1)P_1.$$

Înlocuind expresiile densităților de probabilitate, relația (1) devine:

$$P(S_1/r_1 = x_0) = \left[1 + \frac{P_0}{P_1} e^{-\frac{2x_0(s_{11} - s_{01}) + s_{01}^2 - s_{11}^2}{N_0}}\right]^{-1};$$

$$s_{11} = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T s_1(t)[s_1(t) - s_0(t)]\,dt;$$

$$s_{01} = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T s_0(t)[s_1(t) - s_0(t)]\,dt.$$

Rezultă:

$$s_{11} - s_{01} = \sqrt{E_s};$$

$$s_{11}^2 - s_{01}^2 = E_1 - E_0;$$

$$P(S_1/r_1 = x_0) = \left[1 + \frac{P_0}{P_1} e^{-\frac{2x_0\sqrt{E_s} + E_0 - E_1}{N_0}}\right]^{-1} \tag{2}$$

Calculul numeric. Datele numerice ale problemei (v. și figura 4.4,*a*) sînt:

$$\bar{E} \triangleq P_0 E_0 + P_1 E_1 = 7\frac{N_0}{2} \quad ; \quad E_1 = \frac{5}{2} E_0 \quad ; \quad P_0 = P_1 = \frac{1}{2}.$$

Rezultă:

$$E_0 = 2N_0 \quad ; \quad \frac{E_1 - E_0}{N_0} = 3;$$

$$P(S_1/r_1 = 0) = \frac{1}{1 + e^3} \cong 4{,}8 \cdot 10^{-2}.$$

4.6. *Fie sursa de informație, canalul de transmisiune și receptorul considerate în problema 4.4.*

a) *Să se determine probabilitatea erorii de decizie condiționată de transmitere a semnalului* $s_0(t)$; *idem, pentru* $s_1(t)$.

b) *Să se evalueze probabilitatea erorii receptorului (pe ansamblul condițiilor de transmisiune) considerînd că semnalele* $s_0(t)$ *și* $s_1(t)$ *au energia medie statistică,* $\overline{E}$, *în intervalul de timp* $[0, T]$ *astfel încît* $\overline{E} = 7\frac{N_0}{2}$, *unde:*

$$\overline{E} \triangleq P_0 \int_0^T s_0^2(t)\, dt + P_1 \int_0^T s_1^2(t)\, dt.$$

Soluție

a) Fie $P(D_i/S_j)$ — probabilitatea erorii de decizie condiționată de transmitere a semnalului $s_j(t)$; $i \neq j$.

Receptorul considerat ia decizii conform relației (4.6), unde $K = 0$. Deci:

$$r_1 \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} \frac{1}{2\sqrt{E_s}} (E_1 - E_0) = K_1,$$

unde:

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t)\, dt \;\; ; \;\; i = 0,1;$$

$$E_s = \int_0^T s^2(t)\, dt \;\; ; \;\; s(t) = s_1(t) - s_0(t).$$

Putem scrie:

$$P(D_0 / S_1) = \int_{-\infty}^{K_1} p_{r_1}(x/S_1)\, dx;$$

$$P(D_1/S_0) = \int_{K_1}^{\infty} p_{r_1}(x/S_0)\, dx.$$

Dar:

$$p_{r_1}(x/S_i) = p_{n_1}(x - s_{i1}); \; p_{n_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{x^2}{N_0}}.$$

Rezultă:

$$s_{i1} = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T s_i(t) s(t)\, dt; \; i = 0,1;$$

$$P(D_0 / S_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha_1} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx;$$

$$P(D_1/S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha_2}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx;$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{N_0}} (K_1 - s_{11}); \; \alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{N_0}} (K_1 - s_{01}).$$

Ţinînd seama de notaţiile făcute, rezultă:

$$K_1 - s_{11} = -\frac{\sqrt{E_s}}{2}\ ;\ K_1 - s_{01} = \frac{\sqrt{E_s}}{2}.$$

Deci:

$$-\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\sqrt{E_s}}{2}\sqrt{\frac{2}{N_0}} = \frac{\gamma}{2}\ ;\ \gamma = \sqrt{E_s}\sqrt{\frac{2}{N_0}}.$$

Parametrul γ este cunoscut sub numele de *raport semnal/zgomot.*

Se observă că probabilităţile erorii condiţionate scad cu creşterea lui γ.

b) Probabilitatea erorii receptorului este:

$$P(\varepsilon) = P_0 P(D_1/S_0) + P_1 P(D_0/S_1).$$

Pentru datele problemei ($P_0 = P_1$) rezultă:

$$P(\varepsilon) = P(D_1/S_0) = P(D_0/S_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\gamma}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \qquad (1)$$

Calculul numeric. Datele problemei sînt:

$$\bar{E} \triangleq P_0 E_0 + P_1 E_1 = 7\frac{N_0}{2}\ ;\ E_1 = \frac{5}{2}E_0;$$

$$E_0 = A^2 T\ \ ;\ P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$$

Rezultă:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{A^2T}{2}}\sqrt{\frac{2}{N_0}} = \frac{3}{2}\sqrt{2};$$

$$P(D_0/S_1) = P(D_1/S_0) = \frac{1}{2} - F\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right),$$

unde:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Funcţia $F(z)$ este tabelată [1].

$$F\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \cong F(2{,}12) \cong 0{,}48300.$$

Deci:

$$P(\varepsilon) = P(D_0/S_1) = P(D_1/S_0) \cong 1{,}7 \cdot 10^{-2}.$$

4.7. *Considerăm sistemul de transmisiune din problema 4.6, cu următoarea deosebire: modificăm forma de undă a semnalului* $s_1(t)$. *Ce formă de undă ar trebui să aibe* $s_1(t)$, *astfel încît energia acestuia să fie egală numeric cu cea considerată în problema 4.6, iar probabilitatea erorii receptorului să fie minimă?*

Să se evalueze probabilitatea erorii receptorului corespunzătoare lui $s_1(t)$ *optim determinat.*

Soluție

Expresia (1) (problema 4.6) a probabilității erorii receptorului a fost dedusă independent de forma de undă $s_1(t)$. Probabilitatea erorii $P(\varepsilon)$ depinde exclusiv de parametrul γ, și anume $P(\varepsilon)$ scade cînd γ crește:

$$\gamma = \sqrt{E_s}\sqrt{\frac{2}{N_0}}.$$

Deci, echivalent, $P(\varepsilon)$ scade cînd E_s crește, unde E_s este energia semnalului diferență $s(t) = s_1(t) - s_0(t)$.

Problema de optimizare pe care trebuie să o rezolvăm este deci următoarea: să se determine un semnal $s_1(t)$, de energie finită în $[0,T]$, astfel încît

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t)\,dt = \frac{5}{2}A^2T$$

și

$$E_s = \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt = \text{maxim}.$$

Putem scrie:

$$E_s = E_1 + E_0 - 2\int_0^T s_1(t)s_0(t)\,dt;$$

$$E_1 + E_0 = C,$$

unde C este un număr pozitiv fixat prin problemă. Rezultă că E_s este maxim pentru $\int_0^T s_1(t)s_0(t)\,dt$ minim posibil.

Considerînd inegalitatea lui Schwarz-Buniakovski, [2]:

$$\left|\int_0^T s_1(t)s_0(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{E_1}\sqrt{E_0},$$

unde egalitatea are loc pentru $s_1(t) = \lambda s_0(t)$, λ — număr real oarecare. Deci valoarea $\int_0^T s_1(t)s_0(t)\,dt$ este minimă pentru $s_1(t) = \lambda s_0(t)$ unde $\lambda < 0$.

Parametrul λ trebuie să satisfacă:

$$\lambda^2 E_0 = \frac{5}{2}A^2T.$$

Rezultă:

$$\lambda^2 = \frac{5}{2}\ ;\quad s_1(t) = -\sqrt{\frac{5}{2}}\,s_0(t);$$

$$E_s = \left(1 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 E_0;$$

$$\gamma = \left(1 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)\sqrt{E_0}\sqrt{\frac{2}{N_0}}.$$

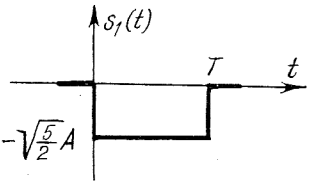


Fig. 4.7. Semnalul $s_1(t)$ optim obținut.

Forma de undă a semnalului $s_1(t)$ optim obținut este dată în figura 4.7.

Calculul numeric.

Pentru valorile numerice considerate în problema (4.6) rezultă:

$$E_0 = A^2T = 2N_0;$$

$$\frac{\gamma}{2} = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}};$$

$$F\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\gamma}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Din tabele, [1], apreciem:

$$F\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cong F(2{,}58) \cong 0{,}49506.$$

Deci (v. rel. (1) — problema 4.6):

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{2} - F\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cong 5 \cdot 10^{-3}.$$

4.8. *Fie sistemul de transmisiune cu decizii considerat în problema 4.4 Înlocuim formele de undă* $s_0(t)$ *și* $s_1(t)$ *prin semnalele* $z_0(t)$ *și* $z_1(t)$ *respectiv, astfel:*

$$z_0(t) = s_0(t) - a(t); \quad z_1(t) = s_1(t) - a(t); \quad t \in [0,\ T],$$

unde a(t) *este un semnal de energie finită în* [0,T].

Să se determine a(t) *astfel încît energia medie statistică a semnalelor purtătoare de informație să fie minimă, pentru o probabilitate a erorii de detecție egală cu cea evaluată în problema 4.6:*

$$\overline{E}_z \overset{\Delta}{=} P_0 \int_0^T z_0^2(t)\,dt + P_1 \int_0^T z_1^2(t)\,dt.$$

Soluție

Pentru sistemul de transmisiune cu decizii din problema 4.6 a rezultat că probabilitatea erorii totale și probabilitățile erorii condiționate satisfac relația:

$$P(\varepsilon) = P(D_1/S_0) = P(D_0/S_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\gamma}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,$$

unde:

$$\gamma = \sqrt{E_s}\sqrt{\frac{2}{N_0}} \; ; \; E_s = \int_0^T s^2(t)\,dt; \; s(t) = s_1(t) - s_0(t).$$

Din datele problemei se observă că:

$$s(t) = s_1(t) - s_0(t) = z_1(t) - z_0(t),$$

ceea ce face ca probabilitățile erorii condiționate, și implicit ale erorii totale a receptorului, să fie aceleași indiferent dacă semnalele purtătoare de informație sînt $s_1(t)$ și $s_0(t)$ sau $z_1(t)$ și $z_0(t)$.

Rezultă că problema de optimizare cere determinarea semnalului $a(t)$, de energie finită în $[0,T]$, astfel încît valoarea energiei medii statistice $\bar{E}_z$

$$\bar{E}_z = P_0\int_0^T z_0^2(t)\,dt + P_1\int_0^T z_1^2(t)\,dt$$

să fie minimă.

Ținînd seama de expresiile semnalelor $z_0(t)$ și $z_1(t)$, rezultă:

$$\bar{E}_z = \bar{E} - \int_0^T \alpha(t)a(t)\,dt, \tag{1}$$

unde:

$$\bar{E} = P_0\int_0^T s_0^2(t)\,dt + P_1\int_0^T s_1^2(t)\,dt;$$

$$\alpha(t) = 2\sum_{i=0}^{1} P_i s_i(t) - a(t).$$

Din relația (1) rezultă că trebuie determinat $a(t)$ astfel încît valoarea $\int_0^T \alpha(t)a(t)dt$ să fie maximă.

Se rezolvă folosind inegalitatea lui Schwarz-Buniakovski [2]

$$\left|\int_0^T \alpha(t)a(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\int_0^T \alpha^2(t)\,dt}\sqrt{\int_0^T a^2(t)\,dt}. \tag{2}$$

Egalitatea în expresia (2) are loc dacă:

$$\alpha(t) = \lambda a(t).$$

Pentru problema de optimizare considerată se impune $\lambda > 0$;

$$2\sum_{i=0}^{1} P_i s_i(t) - a(t) = \lambda a(t).$$

Rezultă:

$$a(t) = \frac{2}{1+\lambda}\sum_{i=0}^{1} P_i s_i(t);$$

$$\bar{E}_z = \bar{E} - \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} P_i P_j \int_0^T s_i(t)s_j(t)\,dt.$$

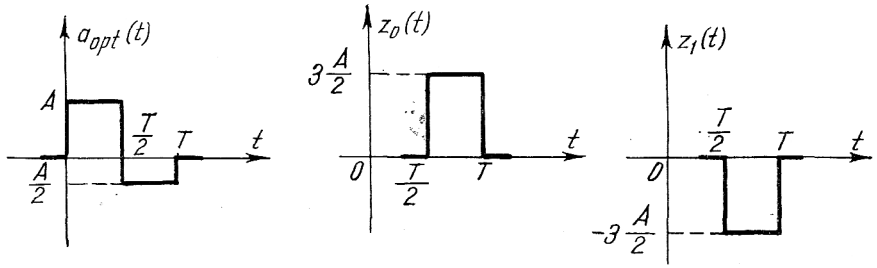


Fig. 4.8. Formele de undă optime pentru $a(t)$, $z_0(t)$ **şi** $z_1(t)$.

Se observă că $\bar{E}_z$ este minim pentru $\lambda = 1$.
Rezultă valorile optime $a_{opt}(t)$ şi $\bar{E}_{opt}(t)$ pentru $a(t)$ şi $\bar{E}_z$, respectiv:

$$\left.\begin{aligned} a_{opt}(t) &= \sum_{i=0}^{1} P_i s_i(t); \\ \bar{E}_{opt} &= \bar{E} - \int_0^T a^2(t)\,dt = P_0 P_1 \int_0^T s^2(t)\,dt, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

unde $s(t) = s_1(t) - s_0(t)$.
Formele de undă $a_{opt}(t)$ şi semnalele $z_0(t)$ şi $z_1(t)$ corespunzătoare (optime) sînt date în figura 4.8 (v. rel. (3) şi figura 4.4,*a*).

Înlocuind în relaţia (3) $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$, rezultă:

$$\bar{E}_{opt} = \frac{1}{4} E_s = 0{,}225.$$

4.9. *Canalul de transmisiune este cu zgomot aditiv, alb, gaussian, de valoare medie statistică nulă şi densitate spectrală de putere* $\frac{N_0}{2}$ *(W/Hz). La recepţie se fac observaţii continue în intervalul* [0, T] *şi se iau decizii conform criteriului Bayes.*

Să se determine formele de undă $s_0(t)$ *şi* $s_1(t)$ *optime în sensul următor: pentru o probabilitate dată a erorii totale a receptorului, aceste semnale* $s_0(t)$ *şi* $s_1(t)$ *să fie de energie medie statistică* $\bar{E}$ *minimă:*

$$\bar{E} \triangleq P_0 \int_0^T s_0^2(t)\,dt + P_1 \int_0^T s_1^2(t)\,dt.$$

Soluţie

Fie $s_0(t)$ şi $s_1(t)$ semnalele purtătoare de informaţie (alese la întîmplare, nu neapărat perechea optimă). Receptorul de tip Bayes ia decizii conform relaţiei (4.6).

Fie $P(D_i/S_j)$ — probabilitatea erorii de decizie, condiţionată de transmisiunea semnalului $s_j(t)$; $j \neq i$.

Ţinînd seama de expresiile densităţilor de probabilitate asociate variabilelor aleatoare r_1 şi n_1 (v. rel. (4.8) şi (4.9)) rezultă (v. şi problema 4.6):

$$P(D_0/S_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha_1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx; \quad P(D_1/S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha_2}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx, \qquad (1)$$

unde:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{\frac{N_0}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_s}} \ln K - \sqrt{\frac{2}{N_0}} \cdot \frac{\sqrt{E_s}}{2}; \\ \alpha_2 &= \sqrt{\frac{N_0}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_s}} \ln K + \sqrt{\frac{2}{N_0}} \cdot \frac{\sqrt{E_s}}{2}; \\ K &= \frac{C_{10} P_0}{C_{01} P_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Probabilitatea erorii totale a receptorului este:

$$P(\varepsilon) = P_1 P(D_0 / S_1) + P_0 P(D_1 / S_0).$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că probabilitatea erorii receptorului considerat depinde de alegerea semnalelor purtătoare de informație numai prin intermediul energiei E_s a semnalului diferență:

$$E_s = \int_0^T s^2(t)\, dt; \quad s(t) = s_1(t) - s_0(t).$$

Deci problema cere să se determine perechea optimă $\{s_0(t), s_1(t)\}$ care satisface condițiile:

$$\begin{cases} E_s = \text{constant (fixat prin problemă, întrucît } P(\varepsilon) \text{ este dat)}; \\ \bar{E} = P_0 E_0 + P_1 E_1 = \text{minim}. \end{cases}$$

Fie o pereche $s_0(t)$ și $s_1(t)$ pentru care:

$$\int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt = E_s.$$

Extragem din semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$ un semnal $a(t)$ de energie finită în $[0, T]$, deci $\int_0^T a^2(t)\, dt < \infty$, astfel încît să generăm o nouă pereche de semnale purtătoare de informație, $z_0(t)$ și $z_1(t)$:

$$\left.\begin{aligned} z_0(t) &= s_0(t) - a(t) \\ z_1(t) &= s_1(t) - a(t) \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Determinăm valoarea optimă a lui $a(t)$, pentru care semnalele $z_0(t)$ și $z_1(t)$ sînt de energie medie statistică minim posibilă. Procedeul este același din problema 4.8.

Deci căutăm $a(t)$ pentru care:

$$P_0 \int_0^T z_0^2(t)\, dt + P_1 \int_0^T z_1^2(t)\, dt = \textit{minim},$$

date fiind semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$ (deci dată fiind energia E_s).

Rezultă următoarea expresie pentru $a(t)$ optim:

$$a_{opt}(t) = P_0 s_0(t) + P_1 s_1(t).$$

Evident, noile semnale $z_0(t)$ și $z_1(t)$ specificate de $a_{opt}(t)$ sînt optime numai în raport cu modalitatea de generare exprimată de relațiile (3) (adică extrăgînd un semnal $a(t)$ dintr-o pereche $s_0(t)$ și $s_1(t)$ dată); deci ele nu formează perechea optimă la modul absolut, căutată prin problemă.

Presupunem acum că am găsit perechea $\{s_0(t), s_1(t)\}$ optimă căutată. În acest caz, rezultă că nu se poate obține din aceasta o altă pereche de energie medie mai mică, prin extragerea unui semnal $a(t)$. Deci:

$$a_{opt}(t) = 0 = P_0 s_0(t) + P_1 s_1(t).$$

Deci perechea optimă de semnale trebuie să satisfacă următoarea condiție:

$$s_1(t) = -\frac{P_0}{P_1} s_0(t).$$

Prin datele problemei, $P(\varepsilon)$ este fix; deci E_s este dat.

$$s(t) = s_1(t) - s_0(t) = -\frac{1}{P_1} s_0(t).$$

Perechea optimă este prin urmare, de forma:

$$\left.\begin{aligned} s_0(t) &= -P_1 s(t) \\ s_1(t) &= P_0 s(t) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

unde $s(t)$ este o formă de undă oarecare, dar care satisface condiția

$$E_s = \int_0^T s^2(t)\ dt.$$

Există deci o infinitate de perechi optime, specificate de alegerea lui $s(t)$. Oricare dintre aceste perechi (deci cele care satisfac relațiile (4)) are aceeași probabilitate $P(\varepsilon)$, specificată de E_s, și aceeași energie medie statistică $\bar{E}_{opt}$, specificată tot de E_s:

$$\bar{E}_{opt} = P_0 E_0 + P_1 E_1,$$

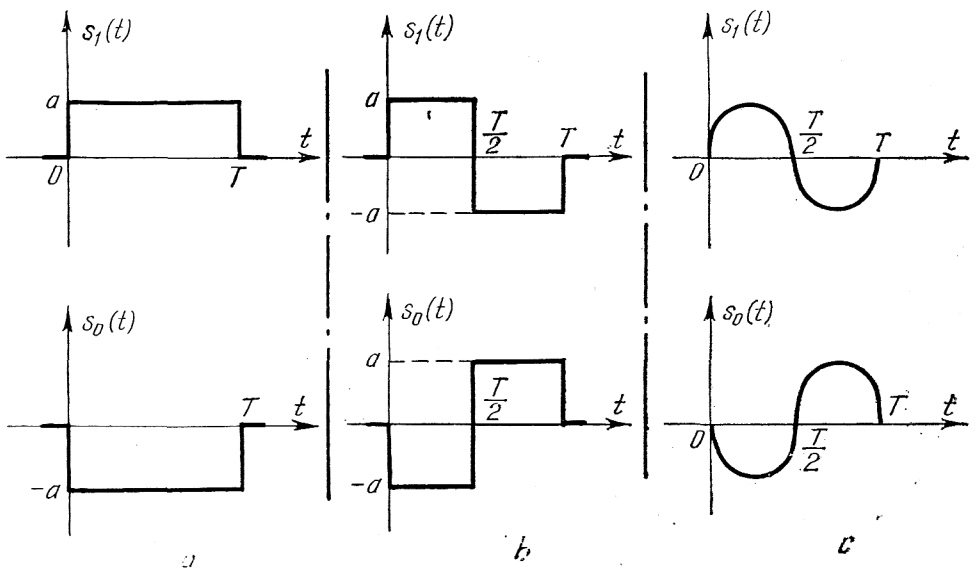


Fig. 4.9. **Exemple de perechi optime de semnale, $s_0(t)$ și $s_1(t)$, cînd $P_0 = P_1$.**

unde E_0 și E_1 sînt energiile semnalelor optime $s_0(t)$ și $s_1(t)$, exprimate de relația (4). Deci:

$$\bar{E}_{opt} = P_0 P_1 E_s.$$

Se observă că dacă $P_0 = P_1$, perechea optimă este de tipul următor:

$$s_0(t) = -s_1(t),$$

forma de undă $s_1(t)$ fiind arbitrar aleasă.

Cîteva exemple de perechi optime pentru cazul $P_0 = P_1$ sînt date în figurile 4.9, *a*, 4.9, *b*, 4.9, *c*.

4.10. *Fie* $\mathcal{C}$ *familia funcțiilor cost* $C(\varepsilon)$, $\varepsilon = \theta - \hat{\theta}$ *simetrice în raport cu* $\varepsilon = 0$ *și convexe:*

$$C(\varepsilon) = C(-\varepsilon);\ C[a\varepsilon_1 + (1-a)\varepsilon_2] \leqslant aC(\varepsilon_1) + (1-a)C(\varepsilon_2) \quad \forall 0 \leqslant a \leqslant 1. \tag{1}$$

Să se arate că dacă densitatea aposteriori $p_{\theta_r}(\theta/\bar{\mathbf{r}})$ *este simetrică în raport cu* $\hat{\theta}_p$, *atunci estimatul bayesian pe baza erorii medii pătratice minime este optim pentru orice funcție din* $\mathcal{C}$ *(„invarianța estimatului bayesian").*

Soluție

Estimatul $\hat{\theta}$ este valoarea care minimizează riscul condiționat $E\{C(\theta - \hat{\theta})/\mathbf{r}\} = \int_{-\infty}^{\infty} C(\theta - \hat{\theta}) p_{\theta, r}\, \theta/\mathbf{r})\, d\theta$. Dacă în loc de θ folosim variabila $\varepsilon_p = \theta - \hat{\theta}_p$* aceasta se rescrie, folosind și proprietatea (1):

$$E\{C(\varepsilon_p + \hat{\theta}_p - \hat{\theta})/\mathbf{r}\} = \int_{-\infty}^{\infty} C(\varepsilon_p + \hat{\theta}_p - \hat{\theta}) p_{\varepsilon_p r}(\varepsilon/\mathbf{r})\ d\varepsilon_p =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} C(\varepsilon_p - \hat{\theta}_p + \hat{\theta}) p_{\varepsilon_p r}(\varepsilon_p/\bar{\mathbf{r}})\, d\varepsilon_p = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} C(\varepsilon_p + \hat{\theta}_p - \hat{\theta}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} C(\varepsilon_p - \hat{\theta}_p + \hat{\theta}) \right] p(\varepsilon_p r/\bar{\mathbf{r}})\, d\varepsilon_p \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\infty}^{\infty} C(\varepsilon_p) p_{\varepsilon_p r}(\varepsilon_p/\mathbf{r})\, d\varepsilon_p = E\{C(\varepsilon_p)/\mathbf{r}\}$$

și se vede că luînd $\hat{\theta} = \hat{\theta}_p$ riscul condiționat își atinge marginea inferioară (relația devine egalitate).

4.11. *Se cere estimarea parametrului* $\boldsymbol{\theta}$, *vector* M *— dimensional cu repartiție normală* $(\mathbf{m}_\vartheta, \mathbf{V}_\vartheta)$, *dacă vectorul observat este*

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\theta + \mathbf{n}, \tag{1}$$

---

* Și dacă sînt asigurate condițiile de convergență pentru riscul condiționat, ceea ce implică de ex. $\lim_{\theta \to \infty} C(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})\, p(\boldsymbol{\theta}/\bar{\mathbf{r}}) = 0$.

unde $\mathbf{n}$ *este zgomot normal* $(\mathbf{0}, \mathbf{V}_n)$, N *— dimensional* $(N \geqslant M)$, *independent de* $\boldsymbol{\theta}$ *(modelul liniar cu „matricea de modulație"* $\mathbf{H}$ *de dimensiuni* $N \times M$; $\mathbf{V}_\vartheta$ *și* $\mathbf{V}_n$ *sînt matricile de covariație).*

Soluție

Calculăm densitatea aposteriori $p_{\vartheta,\mathbf{r}}(\theta/\mathbf{r})$ și cu ajutorul ei găsim atît $\hat{\theta}_p$ cît și $\hat{\theta}_{map}$. Avem

$$p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r}/\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{r})} \tag{2}$$

și toate densitățile care intervin în partea dreaptă a egalității (2) sînt normale. Avem din ipoteze și din (1):

$$E(\mathbf{r}/\theta) = \mathbf{H}\theta; \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}/\theta) = \mathbf{V}_n;$$

$$E(\theta) = \mathbf{m}_\theta; \quad \mathbf{V}(\theta) = \mathbf{V}_\theta;$$

$$E(\mathbf{r}) = \mathbf{H}\mathbf{m}_\theta; \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{H}\theta + \mathbf{n}) = \mathbf{V}(\mathbf{H}\theta) + \mathbf{V}(\mathbf{n}) =$$

$$= E\{\mathbf{H}(\theta - \mathbf{m}_\theta) \cdot (\mathbf{H}(\theta - \mathbf{m}_\theta))^T\} + \mathbf{V}_n = \mathbf{H}E\{(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{m}_\theta)(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{m}_\vartheta)^T\}\mathbf{H}^T +$$

$$+ \mathbf{V}_n = \mathbf{H}\mathbf{V}_\theta\mathbf{H}^T + \mathbf{V}_n.$$

Exprimînd densitățile normale din dreapta egalității (2) cu valorile găsite, obținem la exponent expresia

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{H}\theta)^T\mathbf{V}_n^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{H}\theta) - \frac{1}{2}(\theta - \mathbf{m}_\theta)^T\mathbf{V}_\theta^{-1}(\theta - \mathbf{m}_\theta) +$$

$$+\frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{m}_\vartheta)^T \cdot (\mathbf{H}\mathbf{V}_\vartheta\mathbf{H}^T + \mathbf{V}_n)^{-1} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{m}_\vartheta),$$

care se poate aranja în forma

$$-\frac{1}{2}\left(\theta - \hat{\theta}\right)^T \Sigma^{-1}(\theta - \hat{\theta}),$$

unde

$$\Sigma^{-1} = \mathbf{V}_\theta^{-1} + \mathbf{H}^T\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{H},$$

iar

$$\hat{\theta} = \Sigma\,(\mathbf{H}^T\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{r} + \mathbf{V}_\theta^{-1}\mathbf{m}_\theta).$$

Rezultă că $p_{\theta\mathbf{r}}(\theta/\mathbf{r})$ este tot repartiție normală și deci

$$\hat{\theta}_p = E(\theta/\mathbf{r}) = \hat{\theta}$$

De asemenea, $p_{\theta\mathbf{r}}(\theta/\mathbf{r})$ este maxim pentru $\theta = \hat{\theta}$ și deci

$$\hat{\theta}_{map} = \hat{\theta}.$$

4.12. *Eșantioanele semnalului recepționat sînt* $r_i = s(\theta) + n_i$ $i = 1, 2, \ldots, N$ *unde* n_i *sînt scalari, au repartiție normală* $N(0, \sigma_n^2)$ *și sînt variabile aleatoare independente între ele și independente de* θ *care are repartiție normală* $N(0, \sigma_\theta^2)$. *Să se găsească ecuația pentru* $\hat{\theta}_{map}$. *Caz particular:* $s(\theta) = \theta^3$.

Soluție

Avem

$$p(\theta/r) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma_n^N} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i - s(\theta))^2\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\theta} \exp\left[-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right] \cdot \frac{1}{p(r)} = k(r) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(r_i - s(\theta))^2}{\sigma_n^2} + \frac{\theta^2}{\sigma_\theta^2}\right]\right\}.$$

(v. rel. (4.15))

Maximul se găsește minimizînd exponentul. Prin derivare obținem

$$\hat{\theta}_{map} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}[r_i - s(\hat{\theta}_{map})]\,\frac{ds}{d\theta}(\hat{\theta}_{map}). \qquad (1)$$

Pentru $s(\theta) = \theta^3$, (1) este o ecuație algebrică de gradul 5:

$$\hat{\theta}_{map} = 3\,\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2}\left[\hat{\theta}_{map}^2 \sum_{i=1}^{N} r_i - \hat{\theta}_{map}^5\right].$$

Se vede că, în general, nu putem avea o expresie analitică pentru soluția lui (1). Dacă(2) are o singură soluție reală, ea este $\hat{\theta}_{map} = 0$ (independentă de r_i). Această situație are loc dacă σ_n este suficient de mare și semnifică faptul că informația apriori asupra lui θ este mai consistentă decît cea obținută din măsurări ($\sigma_\theta < \sigma_n$). Dacă (2) are trei soluții reale, trebuie determinată cea care dă cea mai mică valoare exponentului.

Mai observăm, de asemenea, că $\hat{\theta}_p$ este mult mai dificil de găsit deoarece repartiția aposteriori a lui θ nu este normală.

4.13. *Semnalul recepționat,* r *este o variabilă aleatoare cu repartiție Poisson (un număr de impulsuri) de medie* θ, θ *fiind la rîndul său variabilă aleatoare cu repartiție exponențială:*

$$P(r = k/\theta = a) = \frac{a^k}{k!}\,e^{-a}, \quad k = 0,1, \ldots;$$

$$p(\theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\theta} & \theta > 0, \text{ cu } \lambda \text{ cunoscut} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se calculeze $\hat{\theta}_{map}$ *și* $\hat{\theta}_p$.

Soluți e

Avem pentru densitatea aposteriori a lui θ:

$$p(\theta/r) = \frac{P(r/\theta)p(\theta)}{P(r)} = \frac{\theta^r}{r!}\,e^{-\theta}\,\frac{\lambda e^{-\lambda\theta}}{P(r)} = \frac{\lambda}{P(r)r!}\,\theta^r e^{-(\lambda+1)\theta}.$$

Din condiția de normare $\int_0^\infty p(\theta/r)d\theta = 1$ găsim coeficientul

$$\frac{\lambda}{r!P(r)} = \frac{(\lambda+1)^{r+1}}{r!},$$

deci

$$p(\theta/r) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda+1)^{r+1}}{r!} \cdot \theta^r \cdot \exp[-(\lambda+1)\theta] & \theta > 0 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

$\hat{\theta}_{map}$ se găsește anulînd derivata lui $p(\theta/r)$ (și verificînd că este vorba de maxim); derivăm logaritmul

$$\ln p(\theta/r) = \ln(\lambda+1)^{r+1} - \ln(r!) + r\ln\theta - (\lambda+1)\theta;$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta/r) = \frac{r}{\theta} - (\lambda+1) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{r}{\lambda+1}$$

$\hat{\theta}_p$ se găsește calculînd media condiționată:

$$\hat{\theta}_p = \int_0^\infty \theta \cdot p(\theta/r)\,d\theta = \frac{(\lambda+1)^{r+1}}{r!}\int_0^\infty \theta^{r+1}\exp[-(\lambda+1)\theta]\,d\theta =$$

$$= \frac{(\lambda+1)^{r+1}}{r!}\cdot\frac{(r+1)!}{(\lambda+1)^{r+2}} = \frac{r+1}{\lambda+1}.$$

Se remarcă faptul că $\hat{\theta}_{map} \neq \hat{\theta}_p$.

PROBLEME PROPUSE

4.14. *Semnalele* $s_0(t)$ *și* $s_1(t)$ *sînt de energie finită în* $[0,T]$. *Receptorul face o integrare a semnalului primit în intervalul* $[t_1, t_1+\Delta t]$ *și pe baza acestei măsurări ia decizia (fig. 4.14). Zgomotul este aditiv, gaussian, staționar, de valoare medie nulă și densitate spectrală de putere* $q(f)$ *(fig. 4.14).*

Să se exprime relația de decizie care conduce la un cost mediu minim.

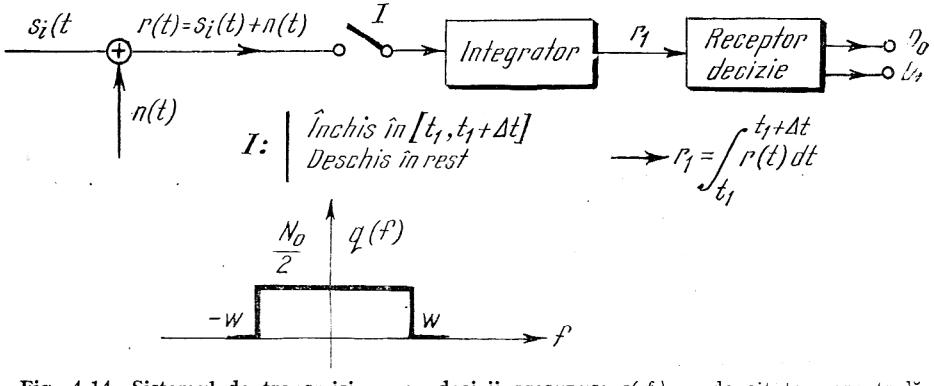


Fig. 4.14. Sistemul de transmisiune cu decizii presupus: $q(f)$ — densitatea spectrală de putere a zgomotului.

Indicație.

Variabila aleatoare r_1 satisface:

$$p_{r_1}(x/S_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-s_{j_1})^2}{2\sigma_1^2}}, \qquad (1)$$

unde σ_1^2 este dispersia variabilei aleatoare $n_1 = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} n(t)\mathrm{d}t$ și $s_{j1} = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} s_j(t)\mathrm{d}t$ (v. și problema 4.1). Singura deosebire față de problema 4.1 apare în exprimarea dispersiei σ_1^2. Deci relația de decizie optimă pe care o căutăm are aceeași expresie (2), din problema 4.1, în care vom ține însă cont că densitățile de probabilitate $p_{r_1}(x/S_0)$ și $p_{r_1}(x/S_1)$ sînt cele din relația (1) de mai sus.

Relația concretă de lucru a receptorului optim căutat este:

$$r_1(s_{11} - s_{01}) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} \sigma_1^2 \ln \frac{C_{10}P_0}{C_{01}P_1} + \frac{1}{2}(s_{11}^2 - s_{01}^2),$$

unde:

$$s_{i1} = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} s_i(t)\mathrm{d}t; \quad \sigma_1^2 = \frac{N_0}{2} b; \quad b = \int_{-W}^{W} |U(f)|^2 \mathrm{d}f;$$

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t; \quad u(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } t \in [t_1, t_1 + \Delta t]; \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

4.15. *Considerăm sistemul de transmisiune binară cu decizii din problema 4.14, cu receptorul optim (care conduce la cost mediu minim). Presupunem:*

$$P_0 = P_1; \; C_{01} = C_{10}.$$

Să se determine probabilitatea erorii totale a receptorului. Să se compare rezultatul cu cel obținut în problema 4.3. Pentru comparație se va considera că, în ambele cazuri, zgomotul este cel descris în figura 4.14, iar semnalele $s_0(t)$ *și* $s_1(t)$ *sînt cele din figura 4.2.*

Indicație

Probabilitatea erorii totale $P(\varepsilon)$ are aceeași expresie ca și în problema 4.3:

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x,$$

unde:

$$\gamma = \frac{d}{\sigma_1}; \quad d = s_{11} - s_{01},$$

s_{i1}; $i = 0,1$ și σ_1 sînt notațiile din problema 4.14 (v. indicația pentru problema 4.14). Compararea probabilităților $P(\varepsilon)$ din problemele 4.3 și 4.15 se reduce deci la compararea parametrilor γ corespunzători.

4.16. *O sursă generează semnalele* $s_0(t)$ *și* $s_1(t)$, *de probabilități egale, la intrarea unui canal de transmisiune cu zgomot aditiv, alb, gaussian, de valoare medie nulă. Observatorul înregistrează în două măsurări semnalele* $r_0(t)$ *și* $r_1(t)$. *Observatorul trebuie să decidă în cele două cazuri, care este semnalul transmis. Deciziile se iau conform criteriului Bayes (relația 4.6).*

Costurile pentru cele două tipuri de erori posibile la recepție sînt egale ($C_{01} = C_{10}$). *Densitatea spectrală de putere a zgomotului alb este* $\frac{N_0}{2}$ *(W/Hz).*

Semnalele sînt date în figura 4.16.

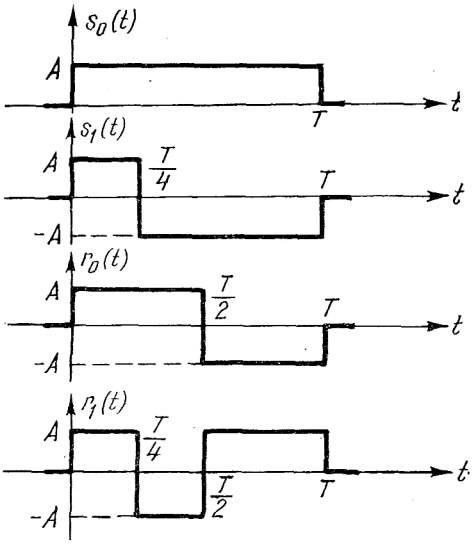


Fig. 4.16. Semnalele $s_i(t)$; $i = 0,1$ și două realizări particulare ale semnalului $r(t)$ (respectiv $r_0(t)$ și $r_1(t)$).

a) *Ce decizii ia observatorul în cele două cazuri de recepționare, adică pentru* $r_0(t)$ *și* $r_1(t)$, *respectiv?*

b) *Să se implementeze receptorul.*

c) *Să se determine probabilitățile celor două tipuri de erori posibile,* $P(D_0/S_1)$ *și* $P(D_1/S_0)$ *și să se scrie relația dintre* A, T, N_0 *pentru probabilități date (constante) ale erorilor* $P(D_0/S_1)$ *și* $P(D_1/S_0)$.

d) *Ce formă de undă ar trebui să aibă* $s_1(t)$, *menținînd însă energia sa constantă, astfel încît probabilitatea erorii medii de detecție,* $P(\varepsilon)$, *să fie minimă?*

e) *Care sînt probabilitățile ca deciziile luate la „a" să fie greșite?*

f) *Extragem din* $s_0(t)$ *și* $s_1(t)$ *un semnal* a(t) *de energie finită în intervalul* [0,T]. *Să se determine* a(t) *optim astfel încît noile semnale purtătoare de informație,* $z_0(t)$ *și* $z_1(t)$,

$$z_0(t) = s_0(t) - a(t); \quad z_1(t) = s_1(t) - a(t)$$

să fie de energie medie statistică minimă, $\overline{E}_z$, *menținînd constantă probabilitatea* $P(\varepsilon)$ *a receptorului Bayes considerat.*

Energia medie a semnalelor $z_0(t)$ *și* $z_1(t)$, $\overline{E}_z$, *este:*

$$\overline{E}_z \triangleq P_1 \int_0^T z_1^2(t)\, dt + P_0 \int_0^T z_0^2(t)\, dt,$$

unde P_i *este probabilitatea de generare a semnalului* $z_i(t)$; $i = 0,1$.

Indicație

Se procedează la fel ca în problemele 4.4—4.8.

4.17. *Sursa emite semnalele* $s_0(t)$ *și* $s_1(t)$ *din figura 4.17. Observatorul înregistrează în intervalul* [0, T] *semnalul transmis înecat în zgomot și ia decizii conform relației (4.6), deci conform criteriului Bayes în ipoteza zgomot alb. Se presupune* $P_0 = P_1$ *și* $C_{10} = C_{01}$.

Să se determine probabilitatea $P(\varepsilon)$ *a erorii de decizie totale, cînd zgomotul este aditiv, gaussian, staționar, de valoare medie nulă și cu densitatea spectrală de putere* q(f) *din figura 4.14, în ipotezele:*

a) $W = \frac{2}{T} \cdot 3$

b) $W = \frac{2}{T} \cdot 10.$

Să se compare rezultatul cu $P(\varepsilon)$ *obținut în ipoteza că zgomotul este alb* $(W \to \infty)$.

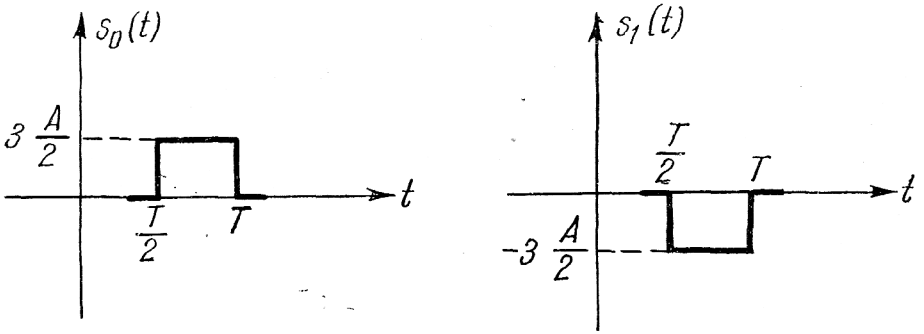


Fig. 4.17. Semnalele $s_i(t)$; $i = 0, 1$.

Calculul numeric se va efectua pentru valorile:

$$\frac{N_0}{2} = 0{,}05 \text{ W/Hz}; \quad E_s = 0{,}9 \text{ Ws};$$

$$E_s = \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 \, dt.$$

Indicație

$$P(\varepsilon) = P(D_1 \mid S_0) = P(D_0 \mid S_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\gamma}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx,$$

unde:

$$\gamma = \frac{\sqrt{E_s}}{\sigma};$$

σ^2 este dispersia variabilei aleatoare n_1 definite astfel:

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T n(t)s(t) \, dt; \quad s(t) = s_1(t) - s_0(t);$$

$n(t)$ — zgomotul canalului cu $q(f)$ din figura 4.14.
Rezultă:

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-W}^{W} |U(f)|^2 \, df; \quad U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \, e^{-j2\pi ft} \, dt;$$

$$u(t) = \frac{s(t)}{\sqrt{E_s}}.$$

Calculul numeric

a) $W = \frac{2}{T} \cdot 3 \rightarrow P(\varepsilon) \cong 1{,}539 \cdot 10^{-2}$;

b) $W = \frac{2}{T} \cdot 10 \rightarrow P(\varepsilon) \cong 1{,}61 \cdot 10^{-2}$;

c) $W = \rightarrow \infty \rightarrow P(\varepsilon) \cong 1{,}7 \cdot 10^{-2}$.

4.18. *Sursa generează semnalele* $s_0(t) = 0$ *și* $s_1(t)$, *în intervalul* $[0, T]$ *pe un canal cu zgomot aditiv, alb, gaussian de valoare medie nulă și densitate spectrală de putere* $\frac{N_0}{2}$ *(W/Hz). Se presupune că observatorul ia decizii conform criteriului Neyman-Pearson, pe baza semnalului recepționat în* $[0, T]$. *Probabilitatea erorii de decizie de tip alarmă falsă este* $P_f = P(D_1/S_0) = 5.10^{-3}$.

Să se determine relația de decizie Neyman-Pearson și să se evalueze probabilitatea unei pierderi, $P_m = P(D_0/S_1)$.

Calculul numeric se va efectua pentru $\gamma^2 = 16$, *unde:*

$$\gamma = \sqrt{E_1}\sqrt{\frac{2}{N_0}}.$$

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t)\,dt.$$

Se presupun costurile: $C_{00} = C_{11} = 0$; $C_{01} = C_{10}$.

Indicație (v. [2], § 7.2.1.7)

Relația de decizie Neyman-Pearson nu depinde de valoarea probabilității P_1 a semnalului $s_1(t)$. Relația Neyman-Pearson coincide cu relația Bayes pentru acea valoare $P_1 = a$ care satisface condiția:

$$P_B(D_1 \mid S_0) = 5 \cdot 10^{-3},$$

unde $P_B(D_1 \mid S_0)$ este probabilitatea erorii receptorului Bayes cînd s-a transmis $s_0(t)$.

Deci:

$$P_B(D_1 \mid S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 5 \cdot 10^{-3};$$

$$\alpha = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1 - P_1}{P_1} + \frac{\gamma}{2}.$$

Din relația de mai sus rezultă valoarea lui a.

Deci relația de decizie Neyman-Pearson este:

$$\int_0^T r(t)\, s_1(t)\, dt \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} \frac{N_0}{2} \ln \frac{1 - a}{a} + \frac{1}{2} E_1.$$

Probabilitatea unei pierderi este:

$$P_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\beta e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

unde:

$$\beta = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1 - a}{a} - \frac{\gamma}{2}.$$

Rezultă

$$P_m \cong 7{,}78 \cdot 10^{-2}$$

4.19. *Eşantioanele semnalului recepţionat sînt* $r_i = \theta + n_i$, $i = 1, \ldots, N$ *unde* θ, n_i, r_i *sînt scalari,* θ *fiind presupus cu repartiţie normală* $N(m_\theta, \sigma^2)$, *iar* n_i — *zgomote, independente între ele şi faţă de* θ, *cu repartiţie* $N(0, \sigma_n^2)$. *Să se găsească* $\hat{\theta}_p$ *şi dispersia erorii* $\theta - \hat{\theta}_p$, *particularizînd modelul problemei 4.11.*

Indicaţie

Se pune

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix}.$$

R.

$$\hat{\theta}_p = \frac{m_p + \dfrac{\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2} \sum_1^N r_i}{1 + \dfrac{\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2} N};$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\theta^2}{1 + \dfrac{\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2} N}.$$

4.20. *O variabilă aleatoare pozitivă* ξ *se zice cu repartiţie log-normală dacă* $\eta = \ln\xi$ *are repartiţie normală. Presupunînd că eşantioanele semnalului recepţionat* $r_1, \ldots, r_n$ *sînt independente şi au repartiţie log-normală să se determine estimatul de maximă plauzibilitate al mediei lui* r.

R. Dacă notăm cu $\widehat{m}_{mp}$ estimatul de maximă plauzibilitate cerut, se obţine

$$\widehat{m}_{mp} = \left(\prod_{k=1}^n r_k \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \exp\left\{ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (\ln r_k - \overline{\ln r}) \right\},$$

unde

$$\overline{\ln r} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln r_k.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Spătaru, Al. *Teoria transmisiunii informaţiei* — vol. I. Semnale şi perturbaţii. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1966.
2. Spătaru, Al. *Teoria transmisiunii informaţiei* — vol. II — Coduri şi decizii. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1971.
3. Lathi, B. P. *Random Signals and Communication Theory.* International Texbook Company, 1968.
4. Franks, L. E. *Signal theory.* Prentice Hall, 1969.
5. Sage, A. P., Melsa J. L. — *Estimation Theory with applications to communication and control.* Mc Grow-Hill, Book Co, New York, 1972.

CAPITOLUL 5

ESTIMAREA FORMEI SEMNALULUI

INTRODUCERE TEORETICĂ

Estimarea formei semnalului este o *operație de filtrare (extragere) a semnalului util din semnalul recepționat* r(t) *pentru a obține un semnal dorit* d(t). Semnalul dorit $d(t)$ este legat de semnalul util (mesajul) $m(t)$ printr-o transformare cunoscută apriori

$$d(t) = \mathfrak{D}[m(t)]. \tag{5.1}$$

Vom nota prin:

$m(t)$ — mesajul debitat de sursă;
$s[t;m(t)]$ — semnalul debitat de emițător (modulator) în canal;
$n(t)$ — zgomotul aditiv care afectează canalul;
$r(t)$ — semnalul recepționat (observat);
$d(t)$ — semnalul dorit la destinatar (ieșirea receptorului).

Vom presupune că semnalul recepționat este de forma

$$r(t) = s[t;\ m(t)] + n(t). \tag{5.2}$$

În practică, de deosebită importanță este cazul cînd transformarea $\mathfrak{D}$ din relația (5.1) este liniară. Principalele situații sînt:

- $d(t) = m(t)$; $r(t) = m(t) + n(t)$; este cazul *filtrării mesajului din zgomotul canalului;* se realizează o estimare a semnalului util în fiecare moment de observație;
- $d(t) = m(t - \alpha)$; $\alpha > 0$; $r(t) = m(t) + n(t)$; este cazul *filtrării cu întîrziere* sau *interpolării* sau, încă, al *netezirii;*
- $d(t) = m(t + \alpha)$; $\alpha > 0$; $r(t) = m(t) + n(t)$; este cazul *filtrării cu anticipare* sau *extrapolării* sau, încă, al *predicției mesajului;*
- $d(t) = m(t + \alpha)$; $\alpha > 0$; $r(t) = m(t)$; este cazul *predicției pure* (canal fără zgomot).

În realitate, semnalul dorit $d(t)$ nu poate fi obținut cu exactitate ci se obține o estimare $\hat{d}(t)$ a lui $d(t)$. Estimarea se bazează pe observarea valorilor $r(t_i)$, numite *date*, ale semnalului recepționat $r(t)$ în anumite momente $t = t_i$.

Un *receptor-estimator optimal* (numit și *filtru optimal*) trebuie să realizeze fizic o transformare convenabilă a datelor

$$\hat{d}(t) = \mathfrak{F}[r(t)],\ \forall t \in I, \tag{5.3}$$

(unde I este un interval de timp sau întreaga axă a timpului), care să reprezinte „cea mai bună estimare" a lui $d(t)$.

Pentru a preciza noțiunea de „cea mai bună estimare" se ia în considerație faptul că în utilizarea cantității $\hat{d}(t)$ ca estimator al lui $d(t)$ comitem o eroare

$$\varepsilon(t) = dt) - \hat{d}(t), \tag{5.4}$$

are trebuie să fie minimă. Deoarece ε este în cazul cel mai general o funcție aleatoare, aprecierea estimării ca optimală se face în raport cu un *criteriu de optim convenabil*. Un criteriu de optim convenabil poate consta, de exemplu, în minimizarea unei funcții de ε.

Unul dintre cele mai utilizate criterii de optim este *criteriul erorii pătratice medii minime*. Estimatoarele optimale care lucrează în raport cu acest criteriu minimizează eroarea pătratică medie definită prin:

$$e = \overline{[d(t) - \hat{d}(t)]^2}. \tag{5.5}$$

În cele ce urmează ne vom ocupa de **filtrele optimale în raport cu criteriul erorii pătratice medii minime** (EPMM).

● În cazul cînd operatorul $\mathcal{T}$ din relația (5.3) este liniar, se enunță **principiul ortogonalității,** conform căruia funcția de covariație $K_{\varepsilon_0 r}(t)$ dintre eroarea ε_0 în cazul estimatului optimal $\hat{d}_0(t)$,

$$\varepsilon_0 = d(t) - \hat{d}_0(t),$$

și semnalul recepționat $r(t)$ este nulă:

$$K_{\varepsilon_0 r}(t) = 0, \quad \forall t \in I. \tag{5.6}$$

● Ca o consecință a principiului ortogonalității, **eroarea pătratică medie** (evident, minimă) **a filtrelor optimale în raport cu EPMM** este

$$e_0 = \overline{[d(t) - \hat{d}_0(t)]d(t)}. \tag{5.7}$$

A. Filtre optimale Wiener

Filtrele optimale Wiener, a căror teorie a fost fundamentată de *Wiener* și *Kolmogorov*, sînt liniare, invariante în timp, estimează în sensul EPMM și *se referă la procese aleatoare staționare.*

● **Funcția pondere** $h_o(t)$ **a unui filtru Wiener** satisface *ecuația Wiener-Hopf*

$$\int_0^\infty h_o(t) K_{rr}(\tau - t)\mathrm{d}t = K_{dr}(\tau), \tag{5.8}$$

unde K_{rr} reprezintă funcția de autocovariație a semnalului recepționat iar K_{dr} — funcția de covariație mutuală dintre semnalul dorit și semnalul recepționat.

a. Filtre optimale Wiener realizabile

● Deoarece funcția pondere $h_{ow}(t)$, respectiv funcția de transfer $H_{ow}(\mathrm{j}\omega)$, corespunzătoare unui **filtru Wiener care recepționează zgomot alb** se deduc mai ușor, sinteza unui filtru optimal Wiener realizabil care recepționează un semnal staționar oarecare, $r(t)$, se face în conformitate cu modelul din figura 1.

Filtrul de albire FA se caracterizează prin funcția pondere $w(t)$ și funcția de transfer $W(p)$, *filtrul invers de albire, FIA* — prin $w^{-1}(t)$, respectiv, $W^{-1}(p)$, iar *filtrul optimal, FO,* — prin $h_o(t)$ și $H_o(p)$. Blocul constituit din *FIA* și *FO* reprezintă filtrul Wiener pentru semnalul recepționat albit, $z(t)$, și se caracterizează prin funcția de pondere $h_{ow}(t)$ și funcția de transfer $H_{ow}(p)$.

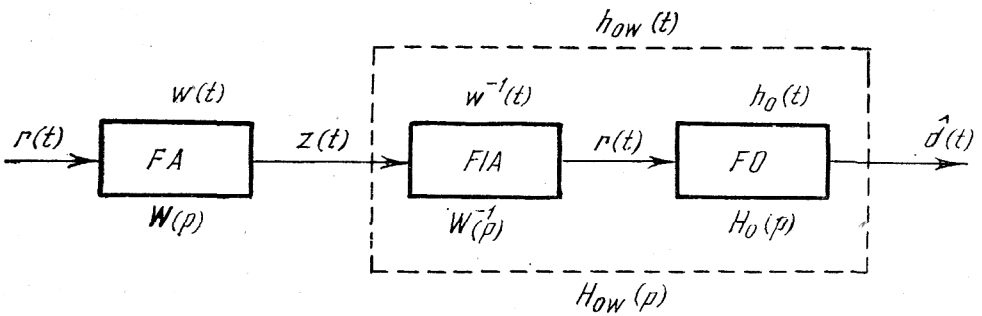


Fig. 1. Filtrul optimal Wiener cu filtru de albire.

● **Funcția de transfer a filtrului optimal Wiener realizabil,** $H_o(p)$. Dacă se consideră că zgomotul alb $z(t)$ are densitatea spectrală de putere S_{zz} unitară*, se obțin relațiile:

$$W(p) = \frac{1}{S_{rr}^{+}(p)}; \tag{5.9}$$

$$W^{-1}(p) = S_{rr}^{+}(p); \tag{5.10}$$

$$H_{ow}(p) = {}^{+}S_{dz}(p); \tag{5.11}$$

$$H_o(p) = W(p)\, H_{ow}(p) = \frac{1}{S_{rr}^{+}(p)}\, {}^{+}S_{dz}(p). \tag{5.12}$$

○ **Atenție** la semnificația notațiilor ${}^{+}S$ și S^{+}, respectiv ${}^{-}S$ și S^{-}, lămurite de relațiile (5.16) și (5.17)!

Deoarece

$$S_{dz}(p) = \frac{S_{dr}(p)}{S_{rr}^{-}(p)}, \tag{5.13}$$

relațiile (5.11) și (5.12) se mai scriu

$$H_{ow}(p) = {}^{+}\left[\frac{S_{dr}(p)}{S_{rr}^{-}(p)}\right]; \tag{5.14}$$

$$H_o(p) = \frac{1}{S_{rr}^{+}(p)}\, {}^{+}\left[\frac{S_{dr}(p)}{S_{rr}^{-}(p)}\right], \tag{5.15}$$

unde s-a notat

$$K_{dz}(\tau) = {}^{+}K_{dz}(\tau) + {}^{-}K_{dz}(\tau); \tag{5.16}$$

$${}^{+}K_{dz}(\tau) = \begin{cases} K_{dz}(\tau) & \tau \geqslant 0; \\ 0 & \tau < 0; \end{cases}$$

* În teoria estimării este mai uzuală notația S pentru densitatea spectrală de putere, întîlnită în capitolul 3 sub forma „q".

$$^{-}K_{dz}(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau > 0; \\ K_{dz}(\tau) & \tau \leqslant 0; \end{cases}$$

$$^{+}S_{dz}(p) = \mathcal{L}\{^{+}K_{dz}(t)\};$$

$$^{-}S_{dz}(p) = \mathcal{L}\{^{-}K_{dz}(t)\}.$$

De asemenea,

$$S_{rr}(p) = S_{rr}^{+}(p) \cdot S_{rr}^{-}(p) \tag{5.17}$$

unde $S_{rr}^{+}(p)$ reprezintă factorul care conține doar zerouri și poli în semiplanul stîng, iar $S_{rr}^{-}(p)$ — factorul care conține zerourile și polii din semiplanul drept.

● Pentru **calculul erorii filtrului optimal Wiener realizabil** se utilizează expresiile

$$e_o = K_{dd}(0) - \int_0^{\infty} h_0(\tau) K_{dr}(\tau)\, d\tau \tag{5.18}$$

și

$$e_o = K_{dd}(0) - \int_{\alpha}^{\infty} \Phi^2(u)\, du, \tag{5.19}$$

unde

$$K_{dz}(t) = \Phi(t + \alpha), \quad u = t + \alpha.$$

Eroarea normată este

$$e_o^n = \frac{e_o}{K_{dd}(0)} = 1 - \frac{1}{K_{dd}(0)} \int_{\alpha}^{\infty} \Phi^2(u)\, du. \tag{5.20}$$

b. Filtre optimale Wiener nerealizabile

● În cazul filtrelor optimale Wiener nerealizabile se obține **funcția de transfer**:

$$H_{on}(p) = \frac{S_{dr}(p)}{S_{rr}(p)} \tag{5.21}$$

care, în cazul $r(t) = m(t) + n(t)$, $d(t) = m(t)$, devine

$$H_{on}(p) = \frac{S_{mm}(p)}{S_{mm}(p) + S_{nn}(p)}. \tag{5.22}$$

● În același caz, formula **erorii** (5.18) ia forma:

$$e_{on} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{mm}(\omega)\, S_{nn}(\omega)}{S_{mm}(\omega) + S_{nn}(\omega)}\, d\omega. \tag{5.23}$$

B. Filtre optimale Kalman — Bucy

În cazul filtrului optimal Kalman—Bucy, criteriul de optim este tot criteriul EPMM, dar *mesajul poate fi un proces aleator staționar sau nestaționar* și

reprezintă soluția unui sistem dinamic generator reprezentat prin *ecuațiile de stare*:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u}; \tag{5.24}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{5.25}$$

unde $\mathbf{u}$ este un proces aleator (cel mai adesea zgomot alb) care excită sistemul dinamic generator al mesajului, iar $\mathbf{y}$ este ieșirea aceluiași sistem.

Mărimile care intervin în ecuațiile de stare (5.24) și (5.25) reprezintă:

$\mathbf{x}$ — vector de stare $n \times 1$;

$\mathbf{F}$ — matricea de evoluție a sistemului dinamic generator, $n \times n$;

$\mathbf{G}$ — matricea constrîngerilor introduse de zgomotul de intrare asupra sistemului generator, $n \times m$;

$\mathbf{u}$ — vectorul intrărilor de excitație, $m \times 1$;

$\mathbf{C}$ — vectorul de selecție sau de modulație, $1 \times n$.

● **Sursa** este modelată de sistemul dinamic descris de relațiile (5.24) — (5.25) reprezentat în figura 2.

Acest sistem dinamic este *utilizat în structura receptorului Kalman-Bucy*.

● Dacă se notează vectorul semnal recepționat

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{n}(t),$$

matricea de autocovariație a semnalului $\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{K}_{uu}(\tau) = \mathbf{Q}\delta(\tau), \tag{5.26}$$

matricea de autocovariație a zgomotului de pe canal

$$\mathbf{K}_{nn} = \mathbf{P}\delta(\tau) \tag{5.27}$$

și matricea de autocovariație a erorii în cazul în care semnalul dorit $\mathbf{d}(t) = \mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}(t) = \overline{[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}_0(t)][\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}_0(t)]^T}, \tag{5.28}$$

atunci **ecuațiile care descriu filtrul optimal Kalman-Bucy** estimator al mesajului sînt:

$$\dot{\hat{x}}_0(t) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_0(t) + \mathbf{A}(t)\,[\mathbf{r}(t) - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}_0(t)]; \tag{5.29}$$

(ecuația procesorului)

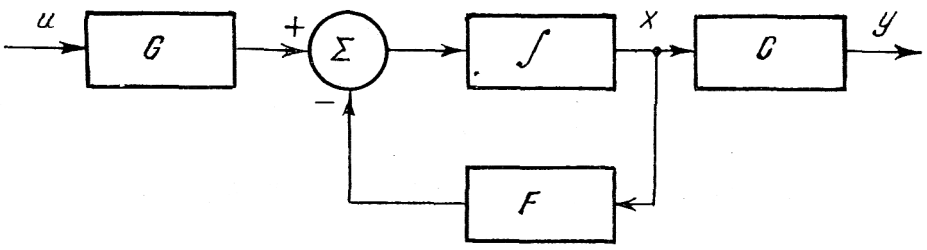


Fig. 2. Modelul unui sistem dinamic generator de mesaj aleator.

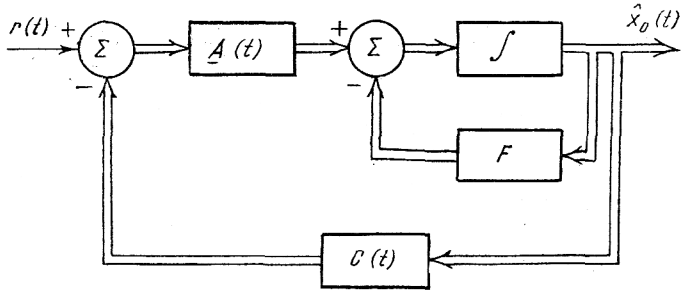


Fig. 3. Structura receptorului de tip filtru optimal Kalman-Bucy.

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}(t)\,\mathbf{C}^T(t)\,\mathbf{P}^{-1}; \tag{5.30}$$

(ecuația cîștigului)

$$\frac{d\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} + \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{F}^T - \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{C}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T. \tag{5.31}$$

(ecuația variației)

● **Structura receptorului de tip filtru-optimal Kalman-Bucy** este prezentată în figura 3.

PROBLEME REZOLVATE

5.1. *Într-un sistem de transmisiune a informației, pe canal se emite mesajul aleator* m(t) *cu densitatea spectrală de putere*

$$S_{mm}(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \alpha > 0.$$

Știind că semnalul perturbator n(t) *de pe canal este zgomot alb aditiv cu densitatea spectrală de putere* $S_{nn}(\omega) = N_0/2$, *se cere:*

a) *să se calculeze funcția de transfer a filtrului optimal Wiener nerealizabil,* $H_{on}(j\omega)$, *în cazurile în care semnalul dorit* d(t) *este:*

1. $d(t) = m(t)$;

2. $d(t) = m(t-\tau)$, $\tau > 0$;

b) *să se calculeze eroarea filtrului optimal Wiener nerealizabil în cazul* d(t) = m(t);

c) *valoarea erorii dedusă la punctul anterior în cazul în care raportul semnal/zgomot definit prin*

$$\lambda = \frac{S_{mm}(0)}{S_{nn}}$$

este $\lambda = 1/2$ *(3 dB).*

Soluție

a1) Folosind relația (5.22) obținem în cazul $d(t) = m(t)$:

$$H_{on}(j\omega) = \frac{4\alpha}{N_0} \cdot \frac{1}{4\alpha/N_0 + \alpha^2 + \omega^2};$$

$$H_{on}(p) = \frac{4\alpha}{N_0} \cdot \frac{1}{4\alpha/N_0 + \alpha^2 - p^2}.$$

a2) În cazul $d(t) = m(t-\tau)$, deoarece

$$S_{dr}(j\omega) = S_{mm}(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

rezultă

$$H_{on}(j\omega) = \frac{4\alpha}{N_0} \cdot \frac{1}{4\alpha/N_0 + \alpha^2 + \omega^2} e^{-j\omega\tau}.$$

b) Eroarea filtrului optimal Wiener nerealizabil pentru $d(t) = m(t)$ este, în conformitate cu relația (5.23),

$$e_{on} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(4\alpha/N_0 + \alpha^2)\left(1 + \dfrac{\omega^2}{4\alpha/N_0 + \alpha^2}\right)}.$$

Pentru rezolvarea integralei, expresia erorii se poate scrie sub forma:

$$e_{on} = \frac{\alpha/\pi}{\sqrt{4\alpha/N_0 + \alpha^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\left(\dfrac{\omega}{\sqrt{4\alpha/N_0 + \alpha^2}}\right)}{1 + \left(\dfrac{\omega}{\sqrt{4\alpha/N_0 + \alpha^2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\alpha/N_0 + \alpha^2}} \left| \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\sqrt{4\alpha/N_0 + \alpha^2}} \right|_{-\infty}^{\infty}.$$

În definitiv, se obține eroarea [2]:

$$e_{on} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4/N_0\alpha}}.$$

c) Deoarece

$$S_{mm}(0) = 2/\alpha,$$

rezultă

$$\lambda = \frac{4}{\alpha N_0}.$$

Prin urmare, se obține valoarea

$$e_{on} = \sqrt{2/3}.$$

5.2. *Funcția pondere a unui filtru optimal Wiener realizabil este*

$$h_o(t) = \begin{cases} \exp\ (-4at), & t \geqslant 0,\ a > 0 \\ 0 \qquad\qquad , & t < 0 \end{cases}$$

Știind că funcția de autocovariație a semnalului recepționat este

$$K_{rr}(\tau) = \exp(-2a \mid \tau \mid),$$

se cere:

a) *să se deducă funcția de covariație dintre semnalul recepționat* r(t) *și semnalul dorit* d(t);

b) *să se determine funcția de autocovariație în origine* K_{dd} (0) *a semnalului dorit astfel încît eroarea filtrului optimal Wiener să reprezinte 50% din* $K_{dd}(0)$.

Soluție

a) *VARIANTA A*

Din ecuația Wiener-Hopf (5.8) scrisă sub forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{rr}(\tau) h_0(t-\tau)\mathrm{d}\tau = K_{dr}(t)$$

se obține pentru $t - \tau \geqslant 0$, respectiv $\tau \leqslant t$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{rr}(\tau)\mathrm{e}^{-4a(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = K_{dr}(t).$$

Deoarece

$$K_{rr}(\tau) = \begin{cases} \exp\ (2a\tau), & \tau < 0 \\ \exp\ (-2a\tau), & \tau \geqslant 0 \end{cases}$$

rezultă:

— pentru $t \geqslant 0$

$$K_{dr}(t) = \mathrm{e}^{-4at}\left[\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2a\tau}\mathrm{e}^{4a\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-2a\tau}\mathrm{e}^{4a\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{2a}\,\mathrm{e}^{-2at} - \frac{1}{3a}\,\mathrm{e}^{-4at};$$

— pentru $t < 0$

$$K_{dr}(t) = \mathrm{e}^{-4at}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{2a\tau}\,\mathrm{e}^{4a\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{6a}\,\mathrm{e}^{2at}.$$

Deci:

$$K_{dr}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\,\mathrm{e}^{-2at} - \dfrac{1}{3a}\,\mathrm{e}^{-4at}, & t \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{6a}\,\mathrm{e}^{2at} \qquad\qquad , & t < 0 \end{cases}.$$

Funcția de covariație în origine este:

$$K_{\dot{a}r}(0_+) = \frac{1}{2a} e^{-2at} - \frac{1}{3a} e^{-4at}\Big|_{t=0} = \frac{1}{6a}$$

și

$$K_{\dot{a}r}(0_-) = \frac{1}{6a} e^{2at}\Big|_{t=0} = \frac{1}{6a},$$

ceea ce arată continuitatea funcției.

Momentul în care se obține *valoarea maximă a funcției de covariație* se deduce anulînd derivata:

$$\frac{dK_{\dot{a}r}(t)}{dt}\Big|_{t>0} = -e^{-2at} + \frac{4}{3} e^{-4at} = 0,$$

de unde rezultă

$$t_0 = \frac{1}{2a} \ln \frac{4}{3}.$$

Graficul lui $K_{\dot{a}r}(t)$ este prezentat în figura 5.2.

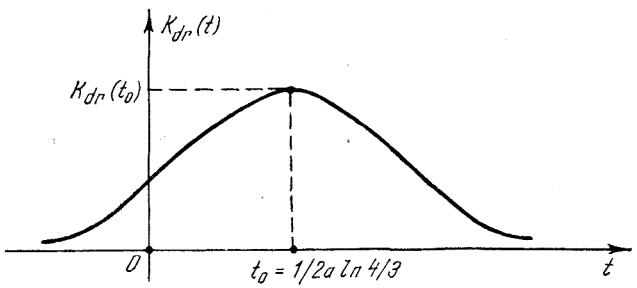


Fig. 5.2. Graficul funcției de covariație $K_{\dot{a}r}(t)$.

VARIANTA B

Din ecuația Wiener-Hopf (5.8) se obține pentru $t \geqslant 0$:

$$K_{\dot{a}r}(\tau) = \int_0^\infty e^{-4at} e^{-2a|\tau - t|}\, d\tau.$$

Deoarece

$$|\tau - t| = \begin{cases} \tau - t, & \tau \geqslant t \\ t - \tau, & \tau < t \end{cases}$$

rezultă :

— pentru $\tau \geqslant 0$

$$K_{\dot{a}r}(\tau) = \int_0^\tau e^{-4at} e^{-2a(\tau - t)} dt + \int_\tau^\infty e^{-4at} e^{-2a(t-\tau)}\, dt = \frac{1}{2a} e^{-2a\tau} - \frac{1}{3a} e^{-4a\tau};$$

– pentru $\tau < 0$

$$K_{ar}(\tau) = \int_0^\infty e^{-4at} e^{-2a(t-\tau)} dt = \frac{1}{6a} e^{2a\tau} .$$

Deci

$$K_{ar}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2a} e^{-2a\tau} - \frac{1}{3a} e^{-4a\tau}, & \tau \geqslant 0 \\ \frac{1}{6a} e^{2a\tau}, & \tau < 0 \end{cases}$$

b) Eroarea filtrului optimal Wiener realizabil este dată de relația (5.18) Eroarea normată este (v. rel. (5.20)):

$$e_o^n = \frac{e_o}{K_{aa}(0)} = \frac{1}{2} .$$

Se deduce din relația (5.18)

$$K_{aa}(0) = \frac{1}{1 - e_o^n} \int_0^\infty h_o(\tau) K_{ar}(\tau) d\tau.$$

Deoarece

$$\int_0^\infty h_o(\tau) K_{ar}(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-4a\tau} \left(\frac{1}{2a} e^{-2a\tau} - \frac{1}{3a} e^{-4a\tau} \right) d\tau = \frac{1}{24a^2},$$

rezultă:

$$K_{aa}(0) = \frac{1}{1 - e_o^n} \cdot \frac{1}{24a^2} = \frac{1}{12\, a^2} .$$

5.3. *Pe un canal de comunicație se transmite mesajul* m(t) *a cărui densitate spectrală de putere este:*

$$S_{mm}(\omega) = \frac{\beta}{\alpha^2 + \omega^2} .$$

Semnalul recepționat este

$$r(t) = m(t) + n(t),$$

unde n(t) *este zgomot alb cu densitatea spectrală de putere*

$$S_{nn} = N_0/2.$$

Se cere:

a) *să se determine constanta* β *astfel încît funcția de autocorelație a mesajului să fie* $R_{mm}(\tau) = \exp(-\alpha |\tau|)$, *și să se arate că funcția de autocorelație a mesajului este egală cu funcția de autocovariație;*

b) *să se calculeze funcția de transfer* $H_{on}(p)$ *a filtrului optimal Wiener nerealizabil în cazul filtrării pure,* d(t) = m(t)*;*

c) *să se deducă funcția de transfer* $H_0(p)$ *a filtrului optimal Wiener realizabil în cazul* $d(t) = m(t)$*;*

d) *să se calculeze eroarea filtrului optimal nerealizabil;*

e) *să se interpreteze rezultatul de la punctul precedent în cazul în care raportul* $S/Z = \lambda = S_{mm}(0)/S_{nn}$ *este*

$$1)\ \lambda \ll 1;$$

$$2)\ \lambda = 3.$$

Soluție

a) În conformitate cu teorema Wiener-Hincin rezultă

$$S_{mm}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Prin identificare, rezultă $\beta = 2\alpha$.

Deoarece valoarea medie a mesajului aleator este

$$\overline{m(t)} = \sqrt{R_{mm}(\infty)} = 0,$$

rezultă că funcția de autocorelație este egală cu funcția de autocovariație, adică

$$R_{mm}(\tau) = K_{mm}(\tau).$$

b) Funcția de transfer a filtrului optimal Wiener nerealizabil în cazul $d(t) = m(t)$ este, în conformitate cu relația (5.22):

$$H_{on}(p) = \frac{4\alpha}{N_0} \cdot \frac{1}{4\alpha/N_0 + \alpha^2 - p^2}$$

(a se vedea problema 5.1).

c) Deoarece funcția de transfer a filtrului nerealizabil se poate scrie sub forma

$$H_{on}(p) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{N_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\alpha/N_0 + \alpha^2} + p} \cdot 2\sqrt{\frac{\alpha}{N_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\alpha/N_0 + \alpha^2} - p},$$

rezultă funcția de transfer a filtrului optimal realizabil de tip filtru trece-jos

$$H_o(p) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{N_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\alpha/N_0 + \alpha^2} + p},$$

cu polul

$$p = -\sqrt{4\alpha/N_0 + \alpha^2}.$$

d) Eroarea filtrului optimal nerealizabil se calculează ca în problema 5.1 și se obține:

$$e_{on} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4/N_0\alpha}}.$$

e) În conformitate cu problema 5.1, rezultă:

$$\lambda = \frac{S_{mm}(0)}{S_{nn}} = \frac{4}{\alpha N_0}.$$

— Dacă

$$\lambda = \frac{4}{\alpha N_0} \ll 1,$$

adică $S_{nn} \gg S_{mm}(0)$, rezultă

$$e_{on} \cong 1,$$

ceea ce arată că filtrarea optimală nu duce la nici o îmbunătățire.

— Dacă

$$\lambda = 4/N_o\alpha = 3$$

adică $S_{mm}(0) = 3$, rezultă o îmbunătățire deoarece $e_{on} = 1/2$.

5.4. *Fie un semnal aleator staționar* s(t) *caracterizat prin funcția de autocorelație*

$$R_{ss}(\tau) = \frac{1}{4}(1 + e^{-2a|\tau|}), \quad a > 0.$$

Semnalul recepționat la ieșirea canalului unui sistem de transmisiune a informației este

$$r(t) = m(t) + n(t),$$

unde n(t) *este zgomot alb cu densitatea spectrală de putere* $S_{nn} = N_0/2$, *iar* m(t) *este mesajul obținut din semnalul* s(t) *prin eliminarea valorii medii a acestuia, dar avînd aceeași putere cu acesta.*

Să se deducă funcția de transfer W(p) *a filtrului de albire a semnalului recepționat* r(t) *în cazul în care zgomotul alb* z(t) *debitat de filtrul de albire are densitatea spectrală de putere* $S_{zz}(\omega) = N/2$.

○ **Notă**: rezultatul se va exprima în funcție de parametrii a, N, N_o și $\lambda = S_{mm}(0)/S_{nn}$.

Soluție

Deoarece valoarea medie a semnalului $s(t)$ este

$$\overline{s(t)} = \sqrt{R_{ss}(\infty)} = \frac{1}{2},$$

iar puterea aceluiași semnal este

$$P_s = R_{ss}(0) = \frac{1}{2},$$

rezultă funcția de autocorelație a semnalului $m(t)$

$$R_{mm}(\tau) = \frac{1}{2}\exp(-2a|\tau|).$$

Densitatea spectrală de putere a lui $m(t)$ este

$$S_{mm}(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|\tau|}\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

sau, încă,

$$S_{mm}(p) = \frac{2a}{4a^2 - p^2}.$$

Pentru semnalul recepționat se deduce

$$S_{rr}(p) = \frac{2a}{4a^2 - p^2} + \frac{N_o}{2} = \frac{N_o}{2} \cdot \frac{4a/N_o + 4a^2 - p^2}{4a^2 - p^2}.$$

Deoarece $\lambda = 1/aN_o$, rezultă:

$$S_{rr}(p) = \frac{N_o}{2} \cdot \frac{4a^2(1 + \lambda) - p^2}{4a^2 - p^2}.$$

Relația care caracterizează filtrul de albire este:

$$S_{rr}(\omega)\ |\ W(j\omega)\ |^2 = S_{zz}(\omega),$$

de unde rezultă

$$S_{rr}(\omega)\ |\ W(j\omega)\ |^2 = \frac{N}{2}$$

sau

$$W(j\omega)W^*(j\omega) = \left(\sqrt{\frac{N}{2}} \cdot \frac{1}{S_{rr}^{+}(\omega)}\right)\left(\sqrt{\frac{N}{2}} \cdot \frac{1}{S_{rr}^{-}(\omega)}\right).$$

Deoarece

$$\frac{1}{S_{rr}(p)} = \sqrt{\frac{2}{N_o}} \cdot \frac{2a + p}{2a\sqrt{1 + \lambda} + p} \sqrt{\frac{2}{N_o}} \cdot \frac{2a - p}{2a\sqrt{1 + \lambda} - p}$$

rezultă

$$\frac{1}{S_{rr}^{+}(p)} = \sqrt{\frac{2}{N_o}} \cdot \frac{2a + p}{2a\sqrt{1 + \lambda} + p};$$

$$\frac{1}{S_{rr}^{-}(p)} = \sqrt{\frac{2}{N_o}} \cdot \frac{2a - p}{2a\sqrt{1 + \lambda} + p}.$$

Prin urmare, în conformitate cu (5.9):

$$W(p) = \sqrt{\frac{N}{2}} \cdot \frac{1}{S_{rr}^{+}(p)},$$

care devine:

$$W(p) = \sqrt{\frac{N}{N_o}} \cdot \frac{2a + p}{2a\sqrt{1 + \lambda} + p}.$$

5.5. *Pe canalul unui sistem de transmisiune a informației se emite mesajul* m(t), *care reprezintă un semnal de comutație cu o distribuție a trecerilor prin zero de tip Poisson (fig. 5.5, a).*

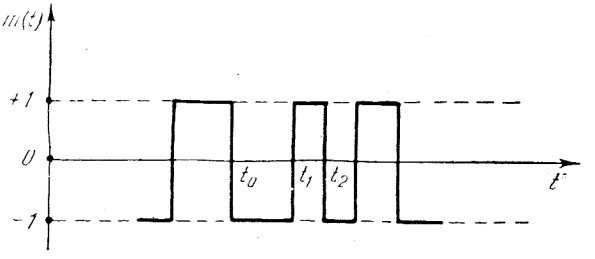


Fig. 5.5,*a*. Semnal de comutație (telegrafic).

Semnalul recepționat r(t) *este*

$$r(t) = m(t) + n(t),$$

unde n(t) *este zgomot alb cu densitatea spectrală de putere* $S_{nn} = N_o/2$, *iar semnalul dorit este* d(t) = m(t + α).

Se cere:

a) *funcția de autocorelație a mesajului;*
b) *densitatea spectrală de putere a mesajului;*
c) *funcția de transfer a filtrului optimal Wiener realizabil în cazurile*

1) $\alpha > 0$ (predicție);

2) $\alpha = 0$ (filtrare pură);

d) *sinteza structurală a filtrului în cazul* $\alpha = 0$;
e) *lărgimea de bandă la 3 dB a procesului mesaj, puterea mesajului, puterea zgomotului, lărgimea de bandă rectangulară echivalentă a mesajului* (BER) *și raportul dintre* λ *și raportul semnal/zgomot la 3 dB,* $\lambda_{3dB}(\lambda/\lambda_{3dB})$;
f) *să se discute variația benzii de frecvență la 3 dB a filtrului optimal,* $\Delta_{FO}(\omega)$, *în funcție de* $a = 2\gamma$, λ *și* N_o.

Soluție

a) Dacă notăm distribuția Poisson prin

$$p_n = \gamma^n \frac{t^n}{n!} e^{-\gamma t},$$

rezultă funcția de autocorelație

$$R(\tau) = \exp(-2\gamma \mid \tau \mid)$$

(vezi probl. 3.6).

b) Densitatea spectrală rezultă

$$S_{mm}(\omega) = \frac{4\gamma}{(2\gamma)^2 + \omega^2}$$

(vezi probl. 3.6).

c) Pentru calculul lui $H_o(p)$ folosim expresiile (5.11) și (5.12).

Determinăm mai întîi $S_{rr}^{+}(p)$. Deoarece mesajul $m(t)$ și zgomotul $n(t)$ se consideră a fi necorelate, rezultă că funcția de autocovariație $K_{rr}(\tau)$ a semnalului recepționat este:

$$K_{rr}(\tau) = K_{mm}(\tau) + K_{nn}(\tau),$$

respectiv densitatea spectrală de putere $S_{rr}(\omega)$ a semnalului recepționat este:

$$S_{rr}(\omega) = S_{mm}(\omega) + S_{nn}(\omega) = \frac{4\gamma}{(2\gamma)^2 + \omega^2} + \frac{N_o}{2}.$$

Calculînd

$$\frac{S_{mm}(0)}{S_{nn}} = \frac{2}{\gamma N_o}$$

și notînd

$$a = 2\gamma,$$

se obține

$$\lambda = \frac{4}{a N_o}$$

și, deci

$$S_{rr}(\omega) = \frac{N_o}{2} \cdot \frac{a^2 (1 + \lambda) + \omega^2}{a^2 + \omega^2}$$

sau

$$S_{rr}(p) = \frac{N_o}{2} \cdot \frac{a^2(1 + \lambda) - p^2}{a^2 - p^2}.$$

Deoarece se poate scrie

$$S_{rr}(p) = \sqrt{\frac{N_o}{2}} \cdot \frac{a\sqrt{1 + \lambda} + p}{a + p} \cdot \sqrt{\frac{N_o}{2}} \cdot \frac{a\sqrt{1 + \lambda} - p}{a - p},$$

se deduce

$$S_{rr}^{+}(p) = \sqrt{\frac{N_o}{2}} \cdot \frac{a\sqrt{1 + \lambda} + p}{a + p};$$

$$S_{rr}^{-}(p) = \sqrt{\frac{N_o}{2}} \cdot \frac{a\sqrt{1 + \lambda} - p}{a - p}.$$

Trebuie să calculăm acum $S_{dr}(p)$. Pentru aceasta calculăm funcția de covariație

$$K_{dr}(\tau) = \overline{d(t)\, r(t-\tau)} = \overline{m(t+\alpha)\,[m(t-\tau)+n\,(t-\tau)]} = \\ = \overline{m(t+\alpha)m(t-\tau)}$$

presupunînd că mesajul $m(t)$ și zgomotul $n(t)$ sînt procese necorelate. Prin urmare:

$$K_{dr}(\tau) = K_{mm}(\tau+\alpha).$$

Deoarece

$$S_{dr}(\mathrm{j}\omega) = \mathfrak{F}\{K_{dr}(\tau)\} = \mathfrak{F}\{K_{mm}(\tau+\alpha)\},$$

rezultă

$$S_{dr}(\mathrm{j}\omega) = S_{mm}(\omega)\ \mathrm{e}^{j\omega\alpha};$$

$$S_{dr}(p) = S_{mm}(p)\ \mathrm{e}^{p\alpha} = \frac{2a}{a^2-p^2}\,\mathrm{e}^{\alpha p}.$$

În definitiv, se obține (v. rel. (5.13)):

$$S_{dz}(p) = \frac{2a}{a+p}\sqrt{\frac{2}{N_o}}\cdot\frac{1}{a\sqrt{1+\lambda}-p}\,\mathrm{e}^{\alpha p}.$$

Dacă descompunem expresia de mai sus sub forma

$$S_{dz}(p) = 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\Bigg(\underbrace{\frac{A}{a+p}}_{\substack{\text{parte}\\ \text{realizabilă}}} + \underbrace{\frac{B}{a\sqrt{1+\lambda}-p} + C\mathrm{e}^{\alpha p}}_{\substack{\text{părți}\\ \text{nerealizabile}}}\Bigg).$$

se observă că pentru $\alpha \geqslant 0$ partea realizabilă este dată doar de primul termen din paranteză. Deci,

$${}^{+}S_{dz}(p) = 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\cdot\frac{A}{a+p}.$$

Determinăm constanta A din

$$2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\cdot\frac{1}{a\sqrt{1+\lambda}-p}\,\mathrm{e}^{\alpha p}\Big|_{p=-a} = 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\,A,$$

de unde rezultă:

$$A = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha a}}{a\sqrt{1+\lambda}+a}.$$

Prin urmare

$${}^{+}S_{dz}(p) = \frac{2}{\sqrt{1+\lambda}+1}\sqrt{\frac{2}{N_o}}\cdot\frac{1}{a+p}\,\mathrm{e}^{-\alpha a}.$$

Acum, rezultă imediat funcția de transfer a filtrului optimal Wiener realizabil *în cazul predicției* ($\alpha > 0$):

$$H_o(p) = 2\frac{2}{N_o}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\lambda}}\cdot\frac{e^{-\alpha a}}{a\sqrt{1+\lambda}+p}\cdot$$

În cazul filtrării pure ($\alpha = 0$) rezultă

$$H_o(p) = 2\frac{2}{N_o}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\lambda}}\cdot\frac{1}{a\sqrt{1+\lambda}+p}\cdot$$

d) Fie cazul filtrării pure ($\alpha = 0$). Funcția de transfer a filtrului $H_o(p)$ reprezintă un filtru trece-jos cu polul:

$$p_o = -a\sqrt{1+\alpha},$$

respectiv, cu frecvența de tăiere dependentă de parametrii a și λ:

$$\omega_t = a\sqrt{1+\lambda}.$$

Caracteristica Bode amplitudine-frecvență a filtrului este reprezentată în figura 5.5, *b*.

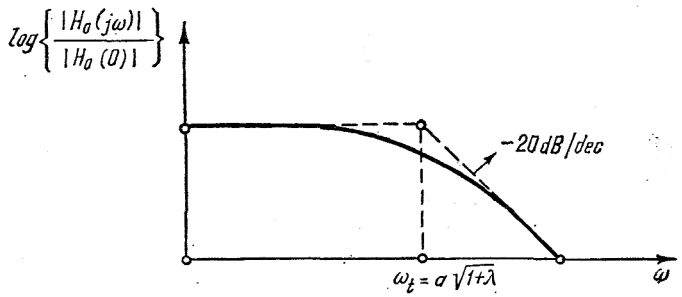


Fig. 5.5,*b*. Caracteristica Bode amplitudine-frecvență a filtrului optimal în cazul filtrării.

Funcția de transfer este de forma

$$H_o(p) = A\frac{1}{b+p},$$

care se mai scrie

$$H_o(p) = A\frac{1/p}{1+b/p}\cdot$$

Graful corespunzător funcției $H_o(p)$ este reprezentat în figura 5.5, *c* și are o cale $C = A\cdot 1/p$ și o buclă adiacentă $B = -b/p$.

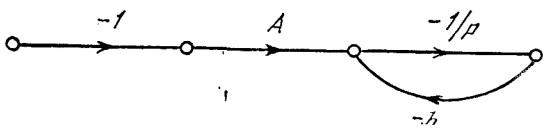


Fig.5.5,*c*. Graful corespunzător funcției de transfer a filtrului optimal în cazul filtrării.

În consecință, funcția de transfer $H_0(p)$ este modelată de circuitul din figura 5.5, *d* legat în cascadă cu un inversor

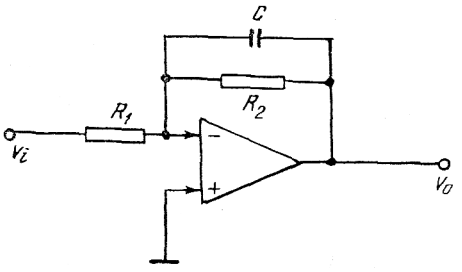


Fig. 5.5,*d*. Modelarea funcției de transfer a filtrului optimal.

unde

$$A = R_2/R_1 = \frac{1}{N_0} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \lambda}};$$

$$b = R_2C = a\sqrt{1 + \lambda}.$$

e) Lărgimea de bandă a procesului mesaj este direct proporțională cu parametrul *a*. Căderea de 3 dB a densității spectrale a mesajului față de valoarea ei în origine se obține la frecvența

$$\omega_{t,m} = a; \quad f_{t,m} = \frac{a}{2\pi}$$

deoarece trebuie ca

$$\frac{S_{mm}(\omega)}{S_{mm}(0)} = \frac{1}{2}.$$

Prin urmare, *banda mesajului la 3 dB* este

$$\Delta_{m,3dB}(f) = \frac{a}{\pi} \text{ (Hz)}.$$

Puterea mesajului pe o bandă de frecvență $\Delta(\omega)$ este:

$$P_m = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta(\omega)} S_{mm}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta(\omega)} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} d\omega.$$

Calculînd integrala, se obține

$$P_m = \frac{1}{\pi}\left|\text{arc tg}\frac{\omega}{a}\right|_{\Delta(\omega)} = \frac{1}{\pi a}\Delta(\omega).$$

Puterea zgomotului în aceeași bandă $\Delta(\omega)$ este

$$P_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta(\omega)} S_{nn}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta(\omega)} \frac{N_0}{2} d\omega = \frac{N_o}{4\pi}\Delta(\omega).$$

Lărgimea de bandă rectangulară echivalentă a mesajului. Raportul dintre puterea mesajului și puterea zgomotului, calculate în banda $\Delta(\omega)$, este:

$$\frac{P_m}{P_n} = \frac{4}{aN_o}$$

și, prin urmare,

$$\lambda = \frac{S_{mm}(0)}{S_{nn}} = \frac{P_m}{P_n} = \frac{4}{aN_o}.$$

Dacă drept $\Delta(\omega)$ se consideră lărgimea de bandă rectangulară echivalentă a mesajului (*BER*) care rezultă dintr-un spectru rectangular de înălțime $S_{mm}(0)$ având aceeași putere ca mesajul real (fig. 5.5, *e*), atunci se obține puterea

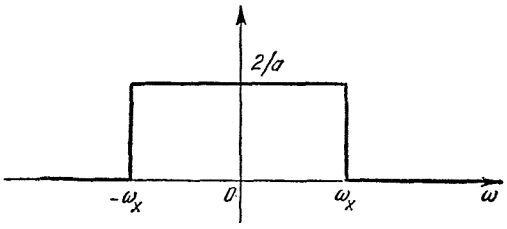


Fig. 5.5,*e* Spectru rectangular pentru definirea lărgimii de bandă rectangulară echivalentă a mesajului (*BER*).

$$P'_m = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta(\omega)} \frac{2}{a}\,d\omega = \frac{1}{\pi a}\,\Delta(\omega).$$

Puterea totală a mesajului este:

$$P_{m,t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{a}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1.$$

Pentru a calcula ω_x, notăm $\Delta(\omega) = 2\omega_x$ și egalăm:

$$P'_m = P_{m,t}.$$

Deci

$$\frac{1}{\pi a}\,2\omega_x = 1,$$

de unde rezultă

$$\omega_x = \frac{\pi a}{2}; \quad f_x = \frac{a}{4}.$$

Raportul λ/λ_{3dB}. Raportul dintre lărgimea de bandă rectangulară echivalentă a mesajului $\Delta_{BER}(f)$ și lărgimea de bandă a mesajului la 3 dB, $\Delta_{m,3dB}(f)$ este

$$\frac{\Delta_{BER}(f)}{\Delta_{m,3dB}(f)} = \frac{a/2}{a/\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Dacă notăm prin λ_{3dB} raportul semnal/zgomot în cazul benzii evaluate la 3 dB, se obține

$$\frac{\lambda}{\lambda_{3dB}} = \frac{P_{m,t}}{P_{m,3dB}} = \frac{\pi}{2} = \frac{\Delta_{BER}(f)}{\Delta_{m,3dB}(f)}.$$

Deci:

$$\lambda = \frac{\pi}{2}\,\lambda_{3dB}.$$

f) Banda de frecvență la 3 dB a filtrului optimal, după cum rezultă din figura 5.5, *b*, este

$$\Delta_{FO}(\omega) = 2\omega_t = 2a\sqrt{1+\lambda};$$

$$\Delta_{FO}(f) = \frac{a}{\pi}\sqrt{1+\lambda}.$$

Înlocuind pe λ, rezultă

$$\Delta_{FO}(f) = \frac{1}{\pi}\sqrt{a^2 + \frac{4}{N_o}}.$$

Se observă că:

— pentru $a = constant$, cînd $\lambda \to \infty$, banda $\Delta_{FO} \to \infty$, permițînd trecerea mesajului fără distorsiuni;

— pentru $a = constant$, cînd $\lambda \to 0$, banda $\Delta_{FO} \to \frac{a}{\pi}$, iar cîștigul tinde către zero; există deci zgomot atît de mare, încît ieșirea filtrului optimal este zero.

Rezultă o discuție similară în funcție de parametrii a și N_o [1], [3].

5.6. *Să se deducă funcția de transfer a filtrului optimal Wiener realizabil în cazul filtrării cu întîrziere, $\alpha < 0$, pentru cazul din problema 5.5.*

Soluție

Din expresia lui S_{dz} dată de relația din problema 5.5

$$S_{dz}(p) = 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\Bigg(\underbrace{\frac{A}{a+p}}_{\substack{\text{parte}\\ \text{realizabilă}}} + \underbrace{\frac{B}{a\sqrt{1+\lambda}-p}}_{\substack{\text{parte}\\ \text{nerealizabilă}}} + \underbrace{C\,e^{\alpha p}}_{\substack{\text{parte}\\ \text{realizabilă}}}\Bigg)$$

se observă că partea realizabilă este dată de primul și ultimul termen, întrucît $\alpha < 0$.

Deoarece coeficientul C nu poate fi ușor determinat prin metoda expusă în problema anterioară, vom calcula în prealabil funcția de covariație $K_{dz}(\tau)$, cu ajutorul căreia vom deduce ${}^{+}S_{dz}(p)$ din relația

$${}^{+}S_{dz}(p) = \int_0^\infty K_{dz}(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau.$$

Calculăm funcția de covariație $K_{dz}(\tau)$:

$$K_{dz}(\tau) = \mathcal{L}_{bil}\{S_{dz}(p)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} S_{dz}(p)\, e^{p\tau}\, dp.$$

Înlocuind expresia lui $S_{dz}(p)$ obținem:

$$K_{dz}(\tau) = \frac{1}{2\pi j}\, 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} \frac{e^{(\alpha+\tau)p}}{(a+p)(a\sqrt{1+\lambda}-p)}\, dp.$$

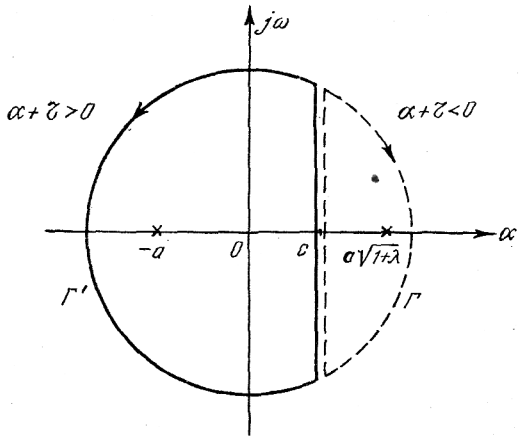


Fig. 5.6. Contururi de integrare pentru evaluarea funcției de covariație $K_{dz}(\tau)$.

Dacă pentru evaluarea integralei se folosește teorema reziduurilor și contururile de integrare pentru $\alpha + \tau > 0$ și $\alpha + \tau < 0$ din figura 5.6, se obține:

— pentru $\alpha + \tau < 0$: unicul pol din interiorul conturului Γ este

$$p = a\sqrt{1+\lambda}.$$

Se obține

$$K_{dz(\Gamma)}(\tau) = 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\left|\frac{e^{(\alpha+\tau)p}}{a+p}\right|_{p=a\sqrt{1+\lambda}}$$

și, deci:

$$K_{dz(\Gamma)}(\tau) = 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\cdot\frac{e^{(\alpha+\tau)a\sqrt{1+\lambda}}}{a+a\sqrt{1+\lambda}}$$

— pentru $\alpha + \tau > 0$: unicul pol din interiorul conturului Γ' este

$$p' = -a.$$

Se obține

$$K_{dz(\Gamma')}(\tau) = 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\left|\frac{e^{(\alpha+\tau)a}}{a\sqrt{1+\lambda}-p}\right|_{p=-a}$$

și, deci:

$$K_{dz(\Gamma')}(\tau) = 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\cdot\frac{e^{-(\alpha+\tau)a}}{a\sqrt{1+\lambda}+a}.$$

Calculăm ${}^{+}S_{dz}(p)$:

$${}^{+}S_{dz}(p) = \int_0^\infty K_{dz}(\tau)\,e^{-p\tau}\,d\tau = \int_0^{-\alpha} 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\cdot\frac{e^{(\alpha+\tau)a\sqrt{1+\lambda}}}{a+a\sqrt{1+\lambda}}e^{-p\tau}\,d\tau +$$

$$+\int_{-\alpha}^\infty 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\cdot\frac{e^{-(\alpha+\tau)a}}{a+a\sqrt{1+\lambda}}e^{-p\tau}\,d\tau.$$

Efectuînd integralele obținem:

$${}^{+}S_{dz}(p) = 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\left\{\frac{e^{\alpha a\sqrt{1+\lambda}}}{(a+a\sqrt{1+\lambda})(a\sqrt{1+\lambda}-p)}\left[e^{-(\alpha a\sqrt{1+\lambda}-p)}-1\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-\alpha a}}{(a+a\sqrt{1+\lambda})(a+p)}e^{(a+p)\alpha}\right\}.$$

Se poate calcula, acum, funcția de transfer:

$$H^0(p)=2\frac{2}{N_o}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\lambda}}\left[\frac{a+p}{(a\sqrt{1+\lambda}+p)(a\sqrt{1+\lambda}-p)}\left(e^{\alpha p}-e^{\alpha a\sqrt{1+\lambda}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a\sqrt{1+\lambda}+p}e^{\alpha p}\right].$$

Aparent funcția de transfer $H_o(p)$ este nerealizabilă datorită prezenței polului $p_0 = a\sqrt{1+\lambda}$. În realitate, în punctul $p = p_o$ în funcția de transfer $H_o(p)$ apare o nedeterminare de forma 0/0. Ridicînd nedeterminarea cu ajutorul regulei lui l'Hôpital se obține o valoare finită:

$$H_o(a\sqrt{1+\lambda})=2\frac{2}{N_o}\cdot\frac{e^{\alpha a\sqrt{1+\lambda}}}{1+\sqrt{1+\lambda}}\cdot\frac{1-a^2(1+\lambda)-a^2\sqrt{1+\lambda}}{2a\sqrt{1+\lambda}}.$$

Prin urmare, $p = p_0$ reprezintă un punct ordinar și, ca atare, funcția de transfer $H_0(p)$ este realizabilă.

5.7. *Semnalul recepționat* r(t) *este un proces aleator cu densitatea spectrală de putere*

$$S_{rr}(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}.$$

ar semnalul dorit este de forma $d(t) = r(t + \alpha)$ (predicție).

Se cere să se determine:

a) *funcția de transfer a filtrului de albire;*

b) *funcția de transfer a filtrului invers de albire;*

c) *funcția pondere a filtrului invers de albire;*

d) *funcția de transfer a filtrului optimal pentru semnalul recepționat albit în cazul predicției;*

e) *funcția de transfer a filtrului optimal Wiener pentru semnalul recepționat în cazul predicției;*

f) *structura predictorului;*

g) *structura filtrului invers de albire.*

Se va considera pentru zgomotul alb densitatea spectrală de putere unitară ($S_{zz} = 1$).

Soluție

a) În conformitate cu relația (5.17) se obține:

$$S_{rr}(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}\cdot\frac{1}{1-j\omega}.$$

Prin urmare:

$$S_{rr}^{+}(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}.$$

Funcția de transfer a filtrului de albire este, în conformitate cu relația (5.9):

$$W(j\omega)=1+j\omega.$$

b) Funcția de transfer a filtrului invers de albire este (v. rel. (5.10)):

$$W^{-1}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}.$$

c) Calculăm funcția pondere a filtrului invers de albire:

$$w^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W^{-1}(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Se obține:

$$w^{-1}(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

d) Deoarece $d(t) = r(t + \alpha)$, în conformitate cu figura 1 rezultă

$$r(t) = \int_{-\infty} w^{-1}(t - \tau)\, z(\tau)\, d\tau;$$

$$r(t + \alpha) = \int_{-\infty}^{t-\alpha} w^{-1}(t + \alpha - \tau)\, z(\tau)\, d\tau.$$

și în același timp

$$r(t + \alpha) = \int_{-\infty}^{t+\alpha} h_{ow}(t - \tau)\, z(\tau)\, d\tau.$$

Identificînd ultimele două relații rezultă

$$h_{ow}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ w^{-1}(t + \alpha), & t \geqslant 0 \end{cases}$$

Ținînd cont de expresia lui $w^{-1}(t)$, rezultă

$$h_{ow}(t) = \begin{cases} \exp[-(t + \alpha)], & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

de unde se obține imediat funcția de transfer căutată,

$$H_{ow}(j\omega) = \frac{e^{-\alpha}}{1 + j\omega}.$$

e) Funcția de transfer a filtrului optimal Wiener este (v. fig. 1):

$$H_o(j\omega) = W(j\omega)\, H_{ow}(j\omega);$$

se obține

$$H_o(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 + j\omega} e^{-\alpha} = e^{-\alpha}.$$

f) În acest caz, predictorul este un simplu atenuator (fig. 5.7, *a*)

g) Densitatea spectrală $S_{rr}(\omega)$ se poate obține excitînd un filtru *RC* de constantă de timp unitară cu o sursă de zgomot alb de impedanță internă nulă (fig. 5.7,b); dacă tensiunea pe condensator reprezintă semnalul $r(t)$,

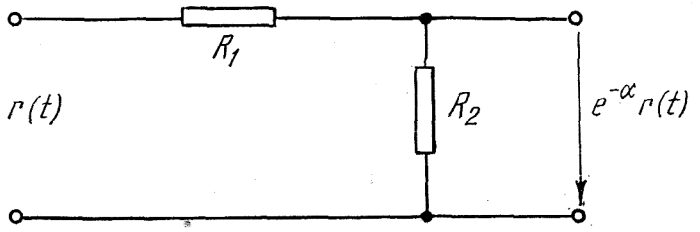


Fig. 5.7,*a* Predictorul ca atenuator.

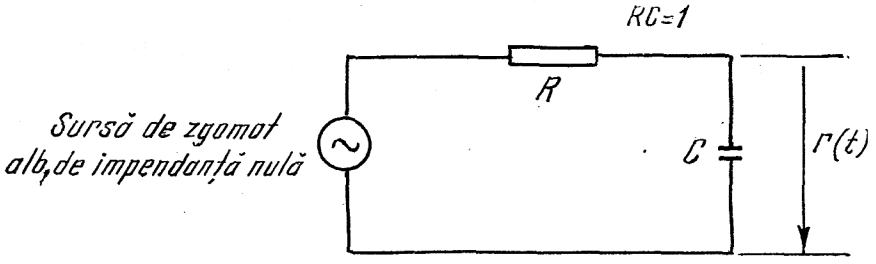


Fig. 5.7,*b*. Generarea unui semnal cu densitatea spectrală de putere S_{rr} (ω).

atunci valoarea acestei tensiuni prezisă de predictorul optim la momentul $t + \alpha$ este tensiunea care rămîne pe condensator după ce acesta se descarcă pe rezistența R după α secunde [5].

5.8. *Funcția de transfer a unui filtru de albire care transformă semnalul aleator recepționat* r(t) *într-un zgomot alb* z(t) *cu densitatea spectrală de putere* $S_{zz} = \frac{N_o}{2}$ *este*

$$W(p) = \sqrt{\frac{2}{N_o}} \cdot \frac{a + p}{b + p}, \quad (a > 0, \; b > 0).$$

Știind că densitatea spectrală de putere de interacțiune dintre semnalul dorit d(t) *și zgomotul alb* z(t) *este*

$$S_{dz}(p) = 2a \sqrt{\frac{2}{N_o}} \cdot \frac{1}{(a + p)(b + p)} e^{\alpha p}, \quad (\alpha > 0),$$

se cere să se deducă funcția de transfer $H_0(p)$ *a filtrului optimal Wiener realizabil.*

Soluție

Conform relației (5.12), pentru a afla funcția de transfer $H_0(p)$ trebuie determinate $W(p)$ și $H_{ow}(p)$.

Relația intrare-ieșire pentru filtrul de albire considerat este

$$S_{zz}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_{rr}(\omega)$$

sau, încă,

$$\frac{N_o}{2} = W(j\omega) W^*(j\omega) S_{rr}(\omega),$$

de unde rezultă

$$W(j\omega) = \sqrt{\frac{N_o}{2}} \cdot \frac{1}{S_{rr}^{+}(j\omega)};$$

$$W^*(j\omega) = \sqrt{\frac{N_o}{2}} \cdot \frac{1}{S_{rr}^{-}(j\omega)}.$$

Din ecuația Wiener-Hopf în cazul particular al zgomotului alb la intrare

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{ow}(\theta)\, K_{zz}(\tau - \theta)\, d\theta = K_{dz}(\tau), \quad (\theta \geqslant 0),$$

unde h_{ow} este funcția pondere a filtrului optimal Wiener pentru zgomot alb, înlocuind

$$K_{zz}(\tau) = \frac{N_o}{2}\,\delta(\tau),$$

rezultă

$$h_{ow}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{2}{N_o} K_{dz}(\tau), & \tau \geqslant 0; \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Funcția de transfer $H_{ow}(p)$ a filtrului optimal Wiener realizabil pentru zgomot alb este

$$H_{ow}(p) = \frac{2}{N_o} S_{dz}^{+}(p).$$

Deoarece $S_{dz}(p)$ se poate scrie sub forma

$$S_{dz}(p) = 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}}\left[\frac{A}{a+p} + \frac{B}{b-p} + C\, e^{\alpha p}\right],$$

rezultă partea realizabilă

$${}^{+}S_{dz}(p) = 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}} \cdot \frac{A}{a+p}.$$

Se determină

$$A = \frac{1}{b+a}\, e^{-\alpha a}$$

și prin urmare, se obține

$${}^{+}S_{dz}(p) = 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}} \cdot \frac{e^{-\alpha a}}{b+a} \cdot \frac{1}{a+p};$$

$$H_{ow}(p) = \frac{2}{N_o} \cdot 2a\sqrt{\frac{2}{N_o}} \cdot \frac{e^{-\alpha a}}{b+a} \cdot \frac{1}{a+p}.$$

Funcția de transfer finală $H_o(p)$ va fi deci

$$H_o(p) = W(p) H_{ow}(p) = \frac{8a}{N_o^2} \cdot \frac{e^{-\alpha a}}{b+a} \cdot \frac{1}{(a+p)(b+p)}.$$

5.9. *Semnalul aleator* x(t) *cu funcția de autocorelație* $R_{xx}(\tau) = exp\ (-\alpha|\tau|)$, $\alpha > 0$, *se aplică la intrarea unui filtru adaptat pentru semnalul*

$$s(t) = \begin{cases} \exp(\beta t), & t < 0. \\ 0 \quad\quad , & t > 0, \ (\beta > 0) \end{cases}$$

obținîndu-se la ieșire semnalul y(t).

Se cere:

a) *densitatea spectrală de putere* $S_{xx}(\omega)$ *a semnalului* x(t);
b) *funcția pondere și funcția de transfer a filtrului adaptat;*
c) *sinteza filtrului adaptat cu elemente de integrare și de însumare;*
d) *funcția de corelație mutuală a semnalului de la intrarea și ieșirea filtrului adaptat,* $R_{xy}(\tau)$;
e) *funcția de corelație mutuală a semnalului de la ieșirea și intrarea filtrului adaptat,* $R_{yx}(\tau)$;
f) *funcția de autocorelație a semnalului de la ieșirea filtrului adaptat* $R_{yy}(\tau)$;
g) *puterile medii ale semnalelor de la intrarea și ieșirea filtrului adaptat;*
h) *funcțiile de transfer ale filtrului de albire și filtrului de albire invers pentru semnalul* x(t);
i) *sinteza filtrului optimal Wiener nerealizabil care permite filtrarea semnalului* r(t) = x(t) *pentru a obține semnalul dorit* d(t) = y(t);
j) *eroarea pătratică medie minimă a filtrului optimal Wiener dedus la punctul anterior.*

Soluție

a) Din teorema Wiener-Hincin se deduce imediat:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Funcțiile $R_{xx}(\tau)$ și $S_{xx}(\omega)$ sînt prezentate în figura 5.9, *a*.

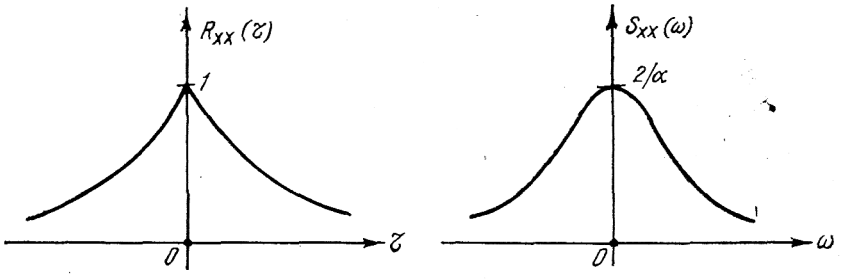


Fig. 5.9,*a*. Reprezentarea funcției de autocorelație $R_{xx}(\tau)$ și a densității spectrale de putere $S_{xx}(\omega)$.

b) Funcția pondere a filtrului adaptat este (v. rel. (3.16)), considerînd întîrzierea introdusă de filtru nulă:

$$h(t) = s(-t) = \begin{cases} \exp(-\beta t), & t \geqslant 0 \\ 0 \quad\quad , & t < 0 \end{cases}$$

și este reprezentată în figura 5.9, *b*.

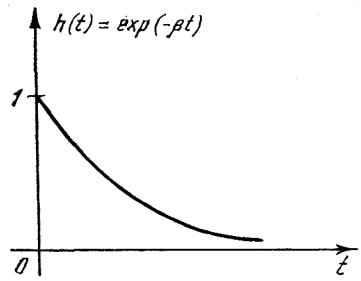


Fig. 5.9,*b*. Funcția pondere a filtrului adaptat.

Funcția de transfer corespunzătoare este

$$H(j\omega) = \int_0^\infty e^{-\beta t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\beta + j\omega}.$$

c) Scriem funcția de transfer sub forma

$$H(p) = \frac{p^{-1}}{1 + \beta p^{-1}},$$

graful corespunzător fiind reprezentat în figura 5.9, *c*.

Deoarece unui arc de transmitanță p^{-1} îi corespunde un integrator, se obține structura filtrului adaptat din figura 5.9, *d*.

d) Pentru calculul funcției de corelație mutuală a semnalului de la intrarea și de la ieșirea filtrului adaptat se pot folosi două metode.

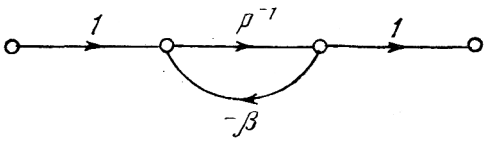


Fig. 5.9,*c*. Graful corespunzător funcției de transfer a filtrului adaptat.

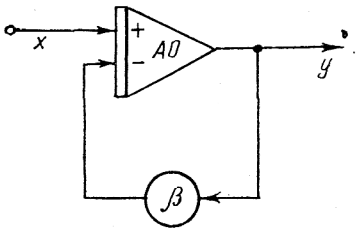


Fig. 5.9,*d*. Structura filtrului adaptat.

VARIANTA A

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\, y(t-\tau)} = \overline{x(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, x(t-\tau-\theta)\, d\theta} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, R_{xx}(\tau + \theta)\, d\theta. \qquad (1)$$

În acest caz expresia funcției de corelație devine

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^\infty e^{-\beta\theta}\, e^{-\alpha|\tau+\theta|}\, d\theta. \qquad (2)$$

Efectuăm calculele pentru cazurile $(\tau + \theta) > 0$, și $(\tau + \theta) < 0$.

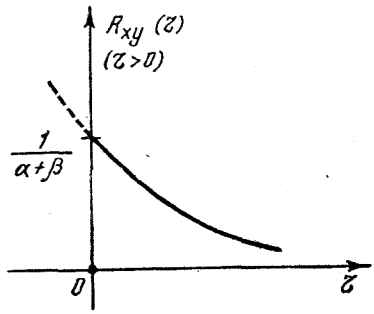
— Pentru $|\tau + \theta| = \tau + \theta$, $\tau + \theta > 0$, $(\tau > 0)$, din relația (2) se obține

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^\infty e^{-\beta\theta}\, e^{-\alpha(\tau+\theta)}\, d\theta$$

adică, în final,

$$R_{\substack{xy \\ (\tau>0)}}(\tau) = \frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha + \beta},$$

Fig. 5.9,*e*. Graficul funcției de corelație $R_{xy}(\tau)$ pentru $\tau > 0$.



funcție reprezentată în figura 5.9, *e*.

— Pentru $|\tau + \theta| = -\tau - \theta$, $\tau + \theta < 0$, $(\tau < 0)$, din relația (2) se obține

$$R_{\substack{xy\\(\tau<0)}}(\tau) = \int_0^{-\tau} e^{-\beta\theta}\, e^{\alpha\tau}\, e^{\alpha\theta}\, d\theta + \int_{-\tau}^{\infty} e^{-\beta\theta}\, e^{-\alpha\tau}\, e^{-\alpha\theta}\, d\theta.$$

Efectuînd integralele I_1 corespunzătoare primului termen și I_2 corespunzătoare celui de-al doilea termen obținem

$$I_1 = \frac{e^{\alpha\tau} - e^{\beta\tau}}{\beta - \alpha};$$

$$I_2 = \frac{e^{\beta\tau}}{\alpha + \beta}$$

și deci:

$$R_{\substack{xy\\(\tau<0)}}(\tau) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} e^{\beta\tau} + \frac{1}{\beta - \alpha} e^{\alpha\tau}.$$

În punctul $\tau = 0$, funcția de corelație mutuală este continuă deoarece

$$R_{xy}(0_+) = R_{\substack{xy\\(\tau>0)}}(0) = \frac{1}{\alpha + \beta};$$

$$R_{xy}(0_-) = R_{\substack{xy\\(\tau<0)}}(0) = \frac{1}{\alpha + \beta}.$$

$R_{xy}(\tau)$ prezintă un maxim în punctul τ_0 care satisface ecuația

$$\left(\frac{dR_{xy}(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau<0} = 0.$$

Se obține astfel

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} e^{\beta\tau} + \frac{\alpha\, e^{\alpha\tau}}{\beta - \alpha} = 0,$$

ecuație satisfăcută de

$$\tau_0 = \frac{1}{\beta - \alpha} \ln \frac{\beta + \alpha}{2\beta}.$$

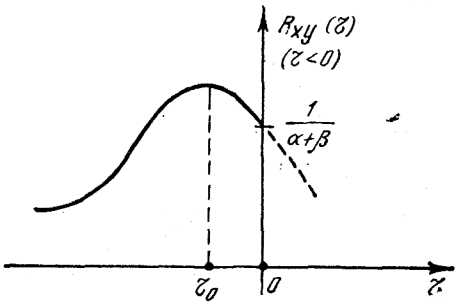


Fig. 5.9,*f*. Graficul funcției de corelație $R_{xy}(\tau)$ pentru $\tau<0$.

Funcția $R_{xy}(\tau<0)$ este reprezentată în figura 5.9,*f*.
În acest fel se obține în final

$$R_{xy}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha+\beta} & \tau>0\\[2ex] \dfrac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}e^{\beta\tau}+\dfrac{1}{\beta-\alpha}e^{\alpha\tau}, & \tau<0\end{cases}$$

funcție reprezentată în figura 5,9,*g*.

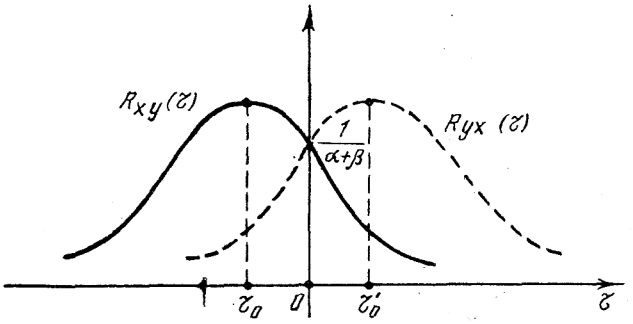


Fig. 5.9,*g*. Graficele funcțiilor de corelație $R_{xy}(\tau)$ și $R_{yx}(\tau)$.

VARIANTA B

Luînd transformata Fourier a relației (1) se obține

$$S_{xy}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta)\ R_{xx}(\tau+\theta)\ e^{-j\omega\tau}d\theta d\tau=S_{xx}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta)\ e^{j\omega\theta}d\theta.$$

Prin urmare:

$$S_{xy}(j\omega)=H^*(j\omega)\ S_{xx}(\omega).$$

Înlocuind expresiile lui $H^*(j\omega)$ și $S_{xx}(\omega)$ se obține

$$S_{xy}(j\omega)=\frac{1}{\beta-j\omega}\cdot\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}. \tag{3}$$

Deoarece

$$R_{xy}(\tau)=\mathfrak{F}^{-1}\{S_{xy}(j\omega)\}, \tag{4}$$

Descompunem membrul drept al relației (3) în fracții simple:

$$\frac{2\alpha}{(\beta - j\omega)(\alpha - j\omega)(\alpha + j\omega)} = \frac{A}{\beta - j\omega} + \frac{B}{\alpha - j\omega} + \frac{C}{\alpha + j\omega},$$

unde:

$$A = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2};$$

$$\beta = \frac{1}{\beta - \alpha};$$

$$C = \frac{1}{\beta + \alpha}.$$

Integrala (4) se calculează pe contururile din figura 5.9, *h*.

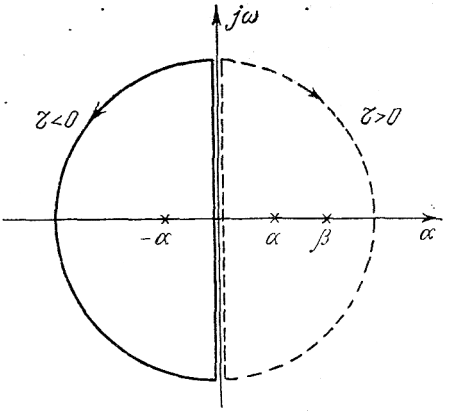


Fig. 5.9,*h*. Contururile de integrare pentru calculul funcției de corelație $R_{xy}(\tau)$.

Se obține același rezultat.

e) Funcția de corelație mutuală $R_{yx}(\tau)$ se calculează în aceleași două variante ca $R_{xy}(\tau)$.

VARIANTA A

$$R_{yx}(\tau) = \overline{y(t)\, x\,(t-\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, \overline{x\,(t-\theta)\, x\,(t-\tau)}\, d\theta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, R_{xx}(\tau - \theta)\, d\theta. \qquad (5)$$

Înlocuim $h(\theta)$ și $R_{xx}(\tau - \theta)$ și obținem

$$R_{yx}(\tau) = \int_{0}^{\infty} e^{-\beta\theta}\, e^{-\alpha|\tau-\theta|}\, d\theta.$$

— Pentru $|\tau - \theta| = \tau - \theta$, $\tau - \theta > 0$, $(\tau > 0)$

$$R_{yx}(\tau) = \int_{0}^{\tau} e^{-\beta\theta}\, e^{-\alpha(\tau-\theta)}\, d\theta + \int_{\tau}^{\infty} e^{-\beta\theta}\, e^{-\alpha(\theta-\tau)} d\theta.$$

Evaluînd cele două integrale, rezultă

$$R_{yx}(\tau) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} e^{-\beta\tau} + \frac{1}{\beta - \alpha} e^{-\alpha\tau}, \quad (\tau > 0).$$

În origine se obține

$$R_{yx}(0_+) = \frac{1}{\beta + \alpha}.$$

Valoarea maximă a lui $R_{yx}(\tau)$ se obține din

$$\left(\frac{dR_{yx}(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau>0} = 0,$$

ecuație satisfăcută de

$$\tau_0' = \frac{1}{\beta - \alpha} \ln \frac{2\beta}{\alpha + \beta}.$$

Se observă că $\tau_0' = -\tau_0 > 0$.

— Pentru $|\tau - \theta| = -\tau + \theta$, $\tau - \theta < 0$, $(\tau < 0)$

$$R_{\substack{yx \\ (\tau<0)}}(\tau) = \int_0^\infty e^{-\beta\theta} e^{-\alpha(\theta-\tau)} d\theta = \frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha + \beta}.$$

Se observă că în origine se obține aceeași valoare ca în cazul lui $R_{xy}(\tau)$. Obținem astfel:

$$R_{yx}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} e^{-\beta\tau} + \dfrac{1}{\beta - \alpha} e^{-\alpha\tau}, & \tau > 0 \\ \dfrac{e^{\alpha\tau}}{\alpha + \beta}, & \tau < 0 \end{cases}$$

Graficul funcției $R_{yx}(\tau)$ este reprezentat prin linie punctată în figura 5.9,*g*

VARIANTA B

Relația (5) se poate scrie sub forma $S_{yx} = H(j\omega) S_{xx}$ și deci:

$$S_{yx}(j\omega) = \frac{2\alpha}{(\beta + j\omega)(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Descompunem în fracții simple această expresie:

$$\frac{2\alpha}{(\beta + j\omega)(\alpha - j\omega)(\alpha + j\omega)} = \frac{A}{\beta + j\omega} + \frac{B}{\alpha - j\omega} + \frac{C}{\alpha + j\omega};$$

se calculează coeficienții

$$A = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2};$$

$$B = \frac{1}{\alpha + \beta};$$

$$C = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Funcția de corelație mutuală se calculează din relația

$$R_{yx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{yx}(j\omega)\}$$

și efectuînd integrala pe contururile din figura 5.9, *i* se obține același rezultat ca în prima variantă de calcul.

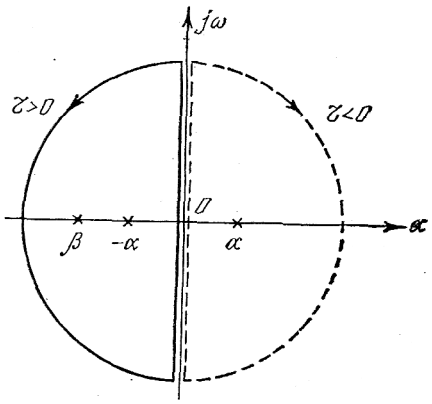


Fig. 5.9,*i*. Contururile de integrare pentru calculul funcției de corelație $R_{yx}(\tau)$.

f) Se calculează inițial densitatea spectrală de putere a semnalului $y(t)$:

$$S_{yy}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega) = \frac{2\alpha}{(\beta^2 + \omega^2)(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Luînd transformata Fourier inversă a lui $S_{yy}(\omega)$ se găsește

$$R_{yy}(\tau) = \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2}\left(e^{-\alpha|\tau|} - \frac{\alpha}{\beta}\, e^{-\beta|\tau|}\right).$$

g) Puterile medii se calculează imediat

$$P_x = R_{xx}(0) = 1;$$

$$P_y = R_{yy}(0) = \frac{1}{\beta(\beta + \alpha)}.$$

h) Funcția de transfer $W(p)$ a *filtrului de albire*, considerînd zgomotul alb de la ieșirea lui cu densitatea spectrală de putere unitară, este dedusă din relația (5.9), unde S_{rr} este S_{xx}.

Deoarece

$$S_{xx}(p) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - p^2},$$

rezultă

$$S_{xx}^{+}(p) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha + p}$$

și deci

$$W(p) = \frac{\alpha + p}{\sqrt{2\alpha}}$$

Pentru filtrul de albire invers rezultă (v. rel. (5.10))

$$W^{-1}(p) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha + p}.$$

i) Funcția de transfer a filtrului optimal Wiener este (v. rel. (5.21))

$$H_{on}(j\omega) = \frac{S_{yx}(j\omega)}{S_{xx}(\omega)}.$$

Prin urmare

$$H_{on}(j\omega) = H(j\omega) = \frac{1}{\beta + j\omega},$$

adică filtrul adaptat este chiar filtrul optimal Wiener.

j) Eroarea este, în conformitate cu relația (5.18),

$$e_0 = R_{yy}(0) - \int_0^\infty h_0(\tau)\, R_{yx}(\tau)\, d\tau,$$

de unde rezultă în final

$$e_0 = \frac{\alpha}{(\beta + \alpha)^2}.$$

5.10. *Fie un semnal* m(t) *cu funcția de autocovariație*

$$K_{mm}(\tau) = \frac{18}{35} e^{-|\tau|} - \frac{3}{35} e^{-6|\tau|}.$$

Se cere:

a) *densitatea spectrală de putere* $S_{mm}(p)$;
b) *funcția de transfer a filtrului de albire;*
c) *funcția de transfer a filtrului invers de albire;*
d) *grafurile pentru sinteza filtrului invers de albire (în două variante);*
e) *funcția pondere a filtrului invers de albire,* $w^{-1}(t)$;
f) *funcția de covariație* $K_{dz}(t)$ *corespunzătoare cazului filtrării cu predicție a semnalului pentru* $\alpha = \frac{1}{6}$ *secunde;*

g) *funcția pondere a filtrului optimal Wiener pentru zgomot alb,* $h_{ow}(t)$, *în condițiile de la punctul „f";*

h) *funcția de transfer* $H_{ow}(p)$ *a filtrului optimal Wiener pentru zgomot alb în condițiile de la punctul „f";*

i) *funcția de transfer a filtrului optimal de predicție Wiener,* $H_o(p)$ *pentru semnalul m(t) în condițiile de la punctul „f" adică* $d(t) = m(t + \alpha)$ $\alpha = \frac{1}{6}$ *secunde; să se deseneze graful corespunzător;*

j) *funcția pondere* $h_0(t)$ *a filtrului optimal de la punctul „i"*

Soluție

a) Din teorema Wiener-Hincin se deduce

$$S_{mm}(p) = \frac{36}{(1 - p^2)(36 - p^2)}.$$

b) Folosim relația (5.9). Deoarece $S_{mm}(p)$ se scrie sub forma

$$S_{mm}(p) = \frac{6}{(1+p)(6+p)} \cdot \frac{6}{(1-p)(6-p)},$$

se obține

$$S^{+}_{mm}(p) = \frac{6}{(1+p)(6+p)}$$

și deci

$$W(p) = \frac{(1+p)(6+p)}{6}.$$

c) Aplicînd relația (5.10) se obține:

$$W^{-1}(p) = \frac{6}{(1+p)(6+p)}.$$

d) VARIANTA A

$$W^{-1}(p) = \frac{6}{6+7p+p^2} = \frac{6p^{-2}}{1+7p^{-1}+6p^{-2}}.$$

Graful corespunzător este prezentat în figura 5.10, *a*.

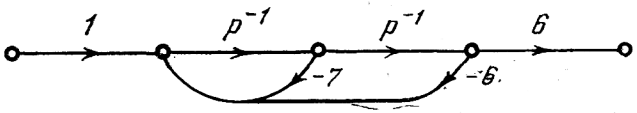


Fig. 5.10,*a*. Graful pentru sinteza filtrului invers de albire (varianta A).

Arcelor de transmitanță p^{-1} le corespund integratoare, arcelor de transmitanțe constante le corespund scalori, iar nodurilor — sumatoare.

VARIANTA B

$$W^{-1}(p) = \frac{6}{(1+p)(6+p)} = \frac{A}{1+p} + \frac{B}{6+p}.$$

După ce se determină constantele A și B, se obține

$$W^{-1}(p) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+6}\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{p^{-1}}{1+p^{-1}} - \frac{p^{-1}}{1+6p^{-1}}\right),$$

expresie căreia îi corespunde graful din figura 5.10, *b*.

e) $$w^{-1}(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{W^{-1}(p)\} = \frac{6}{5}(e^{-t} - e^{-6t}).$$

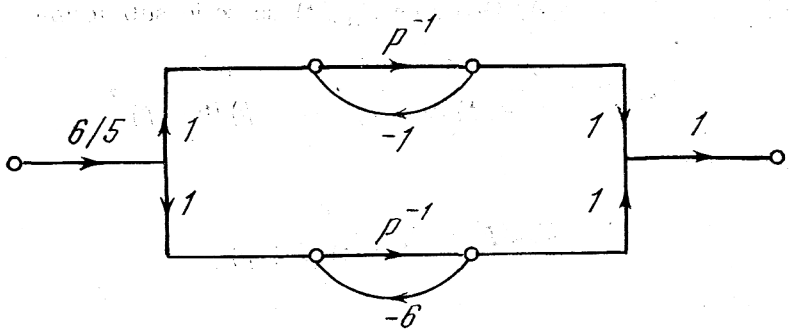


Fig. 5.10,*b*. Graful pentru sinteza filtrului invers de albire (varianta B).

f) $$K_{dz}(t) = w^{-1}(t + \alpha) = \frac{6}{5}[e^{-(t+1/6)} - e^{-6(t+1/6)}].$$

g) $$h_{ow}(t) = \begin{cases} K_{dz}(t), & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

h) $$H_{ow}(p) = \mathcal{L}\{h_{ow}(t)\} = \frac{6}{5} \cdot \frac{e^{-1/6}(p + 6) - e^{-1}(p + 1)}{(p + 1)(p + 6)}.$$

i) $$H_o(p) = W(p)H_{ow}(p) = \frac{1}{5}[e^{-1/6}(p + 6) - e^{-1}(p + 1)].$$

Graful corespunzător este desenat în figura 5.10, *c*.

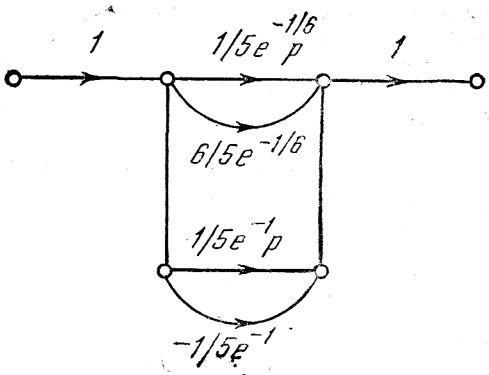


Fig. 5.10,*c*. Graful funcției de transfer a filtrului optimal Wiener de predicție.

j) $$h_o(t) = \frac{6}{5}(e^{-1/6} - e^{-1})\,\delta(t) + \left(\frac{1}{5}e^{-1/6} - e^{-1}\right)\delta'(t).$$

5.11. *La ieșirea unui canal se recepționează semnalul* $r(t) = s(t)$ *cu funcția de autocovariație* $K_{ss}(\tau) = exp\,(-\alpha|\tau|)$. *Folosind principiul ortogonalității, să se determine filtrul optimal liniar de predicție pură care estimează semnalul dorit* $d(t) = s(t + \tau)$, $\tau > 0$, *presupunînd că estimatul este de forma*

$$\hat{d}(t) = a\,s(t).$$

Să se calculeze eroarea pătratică medie minimă. Ce se întîmplă în cazul cînd $\tau \to \infty$? *Să se verifice principiul ortogonalității pentru orice moment* $u \in (-\infty, t)$ *și să se interpreteze.*

Soluție

Din principiul ortogonalității (5.6), care se scrie sub forma

$$\overline{[d(t) - \hat{d}_o(t)]\, r(t)} = 0$$

unde $\hat{d}_o(t)$ reprezintă estimatul optimal, se obține

$$\overline{[s(t+\tau) - a_o s(t)]\, s(t)} = 0$$

sau, încă:

$$K_{ss}(\tau) - a_o K_{ss}(0) = 0,$$

de unde rezultă

$$a_o = \frac{K_{ss}(\tau)}{K_{ss}(0)} < 1.$$

Prin urmare, estimatul optimal al lui $s(t+\tau)$ este

$$\hat{d}_o(t) = a_o s(t) = \frac{K_{ss}(\tau)}{K_{ss}(0)}\, s(t),$$

care reprezintă un atenuator ideal (fig. 5.11).

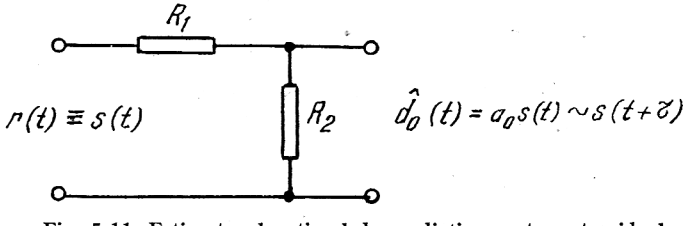


Fig. 5.11. Estimatorul optimal de predicție ca atenuator ideal.

Eroarea pătratică medie minimă este (v. rel. (5.7))

$$e_0 = K_{ss}(0) - a_o K_{ss}(\tau)$$

sau, încă,

$$e_0 = K_{ss}(0) - \frac{K_{ss}^2(\tau)}{K_{ss}(0)}.$$

Dacă înlocuim pe $K_{ss}(0)$ și $K_{ss}(\tau)$ obținem

$$a_o = e^{-\alpha\tau};$$

$$e_0 = 1 - e^{-2\alpha\tau}.$$

Cînd $\tau \to \infty$, $\exp.(-2\alpha\tau) \ll 1$, eroarea de predicție este maximă, ceea ce arată că în cazul predicției unui viitor prea îndepărtat, cunoașterea prezentului nu ne mai este de folos, funcția de autocovariație tinzînd la zero.

Dacă scriem principiul ortogonalității pentru orice $u \leqslant t$, [2], se obține

$$\overline{[s(t+\tau) - a_o s(t)]\, s(u)} = K_{ss}(t+\tau-u) - \frac{K_{ss}(\tau)}{K_{ss}(0)} K_{ss}(t-u) = 0.$$

○ **Se observă că** și în cazul în care se cunoaște semnalul $s(t)$, $\forall t \in (-\infty, t)$, cel mai bun estimator este tot $a_o s(t)$, ceea ce se interpretează prin faptul că, în acest caz, dacă prezentul este cunoscut, cunoașterea trecutului nu aduce nici o informație suplimentară pentru prezicerea viitorului [2].

5.12. *Știind că semnalul recepționat este* r(t) = s(t) *și că semnalul dorit este* d(t) = s(t), *să se determine, folosind principiul ortogonalității, filtrul optimal de interpolare care estimează semnalul dorit sub forma* [2]:

$$\hat{d}(t) = a\, s(0) + b\, s(T).$$

Ce valoare au coeficienții a *și* b *în cazul* t = T/2?

Soluție

Se scrie principiul ortogonalității (v. rel. (5.6)) în momentele $t = 0$ și $t = T$:

$$\overline{[d(t) - \hat{d}_o(t)]\, r(0)} = 0;$$

$$\overline{[d(t) - \hat{d}_o(t)]\, r(T)} = 0,$$

de unde se obțin ecuațiile

$$K_{ss}(0)a + K_{ss}(T)b = K_{ss}(t);$$

$$K_{ss}(T)a + K_{ss}(0)b = K_{ss}(T-t).$$

Rezolvînd sistemul de ecuații de mai sus, se obține:

$$a = \frac{K_{ss}(t)\, K_{ss}(0) - K_{ss}(T)\, K_{ss}(T-t)}{K_{ss}^2(0) - K_{ss}^2(T)};$$

$$b = \frac{K_{ss}(0)\, K_{ss}(T-t) - K_{ss}(t)\, K_{ss}(T)}{K_{ss}^2(0) - K_{ss}^2(T)}.$$

Pentru $t = \frac{T}{2}$, din expresiile anterioare se determină:

$$a = b = \frac{K_{ss}(T/2)}{K_{ss}(0) + K_{ss}(T)}.$$

5.13. *Fie un semnal* m(t) *cu funcția de autocovariație*

$$K_{mm}(\tau) = \frac{3}{2} e^{-|\tau|} + \frac{11}{3} e^{-3|\tau|}.$$

Se cere:

a) *densitatea spectrală de putere* $S_{mm}(\omega)$ *și* $S_{mm}(p)$;
b) *funcția de transfer a filtrului de albire;*

c) *funcția de transfer a filtrului optimal Wiener de predicție* $H_0(p)$, *care estimează semnalul dorit* $d(t) = m(t + \alpha)$, $\alpha > 0$; *aplicație numerică pentru* $\alpha = ln\ 2$;

d) *funcția pondere a filtrului optimal Wiener de predicție pentru cazul de la punctul „c"*;

e) *sinteza structurală a filtrului optimal considerînd semnalul* $m(t)$ *debitat de o sursă de curent, iar răspunsul ca fiind o tensiune.*

Soluție

a) Din teorema Wiener-Hincin se calculează

$$S_{mm}(\omega) = \frac{49 + 25\omega^2}{(1 + \omega^2)(9 + \omega^2)};$$

$$S_{mm}(p) = \frac{49 - 25p^2}{(1 - p^2)(9 - p^2)}.$$

b) Expresia lui S_{mm} se poate scrie sub forma

$$S_{mm}(p) = \frac{7 + 5p}{(1 + p)(3 + p)} \cdot \frac{7 - 5p}{(1 - p)(3 - p)}.$$

Se deduce

$$S^{+}_{mm}(p) = \frac{7 + 5p}{(1 + p)(3 + p)}.$$

Aplicăm formula (5.9) și deducem:

$$W(p) = \frac{(1 + p)(3 + p)}{7 + 5p}.$$

c) Pentru $\alpha = \ln 2$ se găsește

$$H_o(p) = \frac{p + 2}{7 + 5p} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5p + 7}.$$

d) Notînd prin $U(t)$ funcția treaptă unitate, se obține:

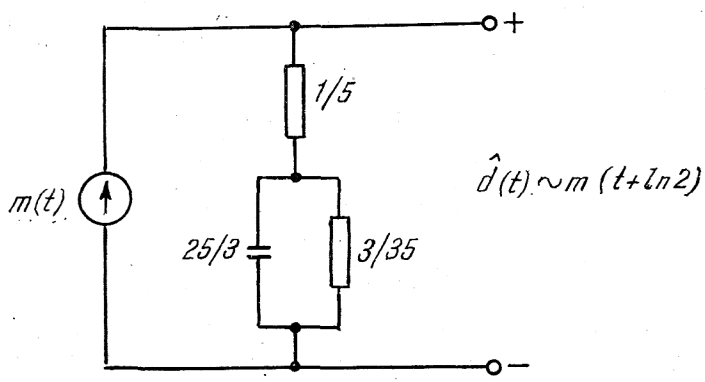


Fig. 5.13. Structura filtrului opttimal de predicție pentru $m(t + \ln 2)$.

$$h_o(t) = \frac{1}{5}\,\delta(t) + \frac{3}{25}\,e^{-7t/5}\,U(t).$$

e) Structura filtrului în acest caz este prezentată în figura 5.13 [2].

5.14. *Semnalul recepționat la ieșirea unui canal este* $r(t) = m(t) + n(t)$, *unde semnalul util și zgomotul sînt procese necorelate caracterizate prin densitățile spectrale de putere*

$$S_{mm}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2};$$

$$S_{nn}(\omega) = \frac{Nb^2}{b^2+\omega^2}.$$

Se cere să se determine funcția de transfer a filtrului optimal Wiener în cazul filtrării pure (cu netezire). Ce se întîmplă cînd $b \to \infty$?

Soluție

Pentru semnalul recepționat se obține densitatea spectrală de putere

$$S_{rr}(\omega) = S_{mm} + S_{nn} = (Nb^2+1)\,\frac{A^2+\omega^2}{(b+j\omega)(b-j\omega)(1+j\omega)(1-j\omega)},$$

unde

$$A^2 = (N+1)\,b^2/(Nb^2+1).$$

Deoarece

$$S_{rr}^{+}(j\omega) = \frac{b\sqrt{N+1}}{A}\cdot\frac{A+j\omega}{(b+j\omega)(1+j\omega)};$$

$$S_{rr}^{-}(j\omega) = \frac{b\sqrt{N+1}}{A}\cdot\frac{A-j\omega}{(b-j\omega)(1-j\omega)}$$

și știind că $S_{dr} \equiv S_{mm}$ putem calcula expresia

$$H_{OW}(j\omega) = \frac{S_{mm}(\omega)}{S_{rr}^{-}(j\omega)} = \frac{A}{b\sqrt{N+1}}\cdot\frac{b-j\omega}{(1+j\omega)(A-j\omega)}$$

care, descompusă în fracții simple, devine:

$$\frac{S_{mm}(\omega)}{S_{rr}^{-}(j\omega)} = \frac{A}{b\sqrt{N+1}}\left(\frac{b+1}{A+1}\cdot\frac{1}{1+j\omega} + \frac{b-A}{A+1}\cdot\frac{1}{A-j\omega}\right).$$

În acest fel

$$^{+}\left[\frac{S_{mm}(\omega)}{S_{rr}^{-}(j\omega)}\right] = \frac{A}{b\sqrt{N+1}}\cdot\frac{b+1}{A+1}\cdot\frac{1}{1+j\omega},$$

așa încît aplicînd formula (5.15) rezultă funcția de transfer

$$H_o(j\omega) = \frac{1}{Nb^2+1}\cdot\frac{b+1}{A+1}\cdot\frac{b+j\omega}{A+j\omega}.$$

Cînd $b \to \infty$, obținem funcția de transfer a filtrului optimal care estimează semnalul $d(t) = m(t)$ în cazul prezenței unui zgomot alb cu densitatea spectrală de putere de valoare N [5].

5.15. *Un condensator de capacitate* C *încărcat la tensiunea inițială* $v_c(0) = V$ *este introdus într-un circuit în serie cu o rezistență* R *și o sursă de tensiune* v(t). *Pentru a cunoaște starea electrică a condensatorului, se transmite un mesaj* m(t), *care reprezintă tensiunea la bornele sale,* $v_C(t)$.

Se cere:

a) *modelul matematic, respectiv ecuația de stare a circuitului (matricele* **F**, **G**, **C**);

b) *structura sistemului dinamic generator al mesajului* m(t) *folosind integratoare și sumatoare;*

c) *forma mesajului* m(t) *în cazul în care* $v(t) = 0$ *și* $v_C(0) = V$ *este o variabilă aleatoare;*

d) *structura sistemului dinamic generator al mesajului în cazul de la punctul „c";*

e) *să se arate că în cazul de la punctul „c" mesajul* m(t) *este un proces aleator nestaționar;*

f) *funcția de transfer a sistemului dinamic generator al mesajului* m(t) *obținut în condițiile* $v_C(0) = V = 0$, v(t) *fiind zgomot alb;*

g) *să se arate că mesajul* m(t) *obținut în condițiile de la punctul „f" este un proces aleator staționar; să se deducă relația dintre densitatea spectrală de putere a zgomotului alb* v(t) *și dispersia* σ_y^2 *a lui* y(t).

Soluție

a) Ecuația care guvernează circuitul este

$$v_R(t) + v_C(t) = v(t), \tag{1}$$

unde $v_R(t)$ este tensiunea pe rezistența R.

Dacă se notează variabila de stare prin

$$x(t) = v_C(t) = m(t),$$

din (1) rezultă:

$$\dot{x} = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}v(t). \tag{2}$$

Ieșirea este reprezentată de mesajul $m(t)$, adică

$$y(t) = x(t). \tag{3}$$

Din ecuațiile de stare (2) și (3) rezultă matricele

$$\mathbf{F} = \left[-\frac{1}{RC}\right]; \quad \mathbf{G} = \left[\frac{1}{RC}\right]; \quad \mathbf{C} = [1].$$

b) Aplicînd transformata Laplace ecuației de stare (2) se obține

$$X(p) = \left[-\frac{1}{RC}X(p) + x(0)\right]\frac{1}{p} + \frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{p}V(p). \tag{4}$$

Structura sistemului dinamic generator al mesajului este reprezentată în figura 5.15, *a*.

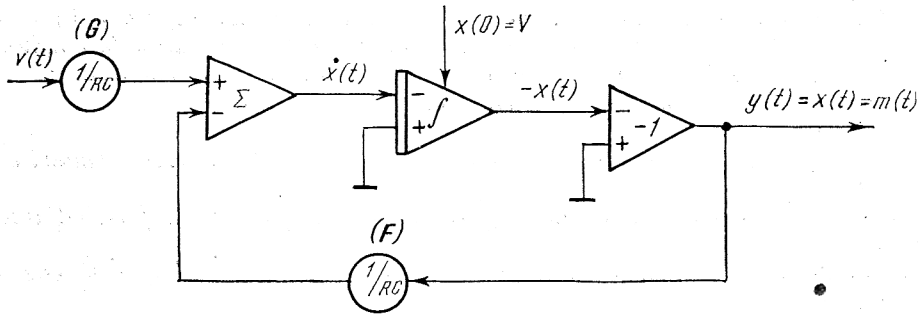


Fig. 5.15,*a*. Structura sistemului dinamic generator al mesajului $m(t)$.

c) În cazul cînd $v(t) = 0$ iar $v_C(0) = V$ este variabilă aleatoare, din ecuația (2) se obține:

$$m(t) = y(t) = x(t) = Ve^{-\frac{1}{RC}t}. \tag{5}$$

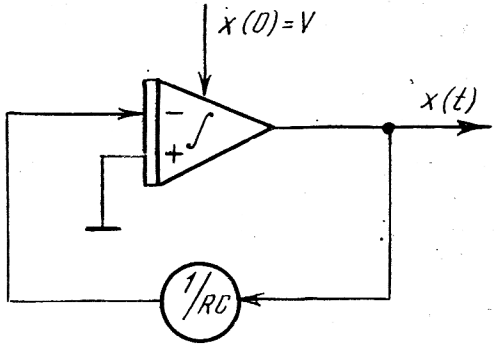


Fig. 5.15, *b*. Structura sistemului dinamic generator al mesajului $m(t) = V \exp(-1/RC)\, t$.

d) Structura sistemului dinamic generator în condițiile de la punctul „*c*" este reprezentată în figura 5.15, *b*.

e) Dacă $v_C(0) = x(0) = y(0) = V$ este o variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate $p(V)$, atunci densitatea de probabilitate a lui $y(t)$ la un moment de timp $t = t_1$ este:

$$w(y, t_1) = p(V) \exp\left(-\frac{1}{RC}\, t_1\right). \tag{6}$$

Din relația (6) rezultă că $y(t)$ este un proces aleator nestaționar, deoarece densitatea sa de probabilitate variază cu timpul.

f) Din relațiile (1) și (4) se obține

$$H(p) = \frac{k}{p + k}, \tag{7}$$

unde $k = 1/RC$.

g) Densitatea spectrală a lui $y(t)$ cînd densitatea spectrală a lui $v(t)$ este $S_{vv} = N_0/2$ rezultă

$$S_{yy}(\omega) = |\, H(j\omega)\, |^2 S_{vv}(\omega)$$

sau, încă,

$$S_{yy}(\omega) = \frac{k^2 N_0/2}{k^2 + \omega^2}. \tag{8}$$

Spectrul $S_{yy}(\omega)$ fiind rațional, rezultă că $y(t)$ este un proces aleator staționar.

Se alege partea realizabilă a lui $S_{yy}(\omega)$:

$$^{+}S_{yy}(p)^{-} = \left(\frac{kN_0/4}{k + j\omega}\right)_{j\omega=p} = \frac{kN_0/4}{k + p}.$$

Conform relației (3.13), trebuie să calculăm

$$\sigma_y^2 = R(0) - R(\infty),$$

unde:

$$R(0) = \lim_{p\to\infty} p \cdot {}^{+}S_{yy}(p) = kN_0/4;$$

$$R(\infty) = \lim_{p\to 0} p \cdot {}^{+}S_{yy}(p) = 0.$$

Deci:

$$\sigma_y^2 = kN_0/4.$$

Prin urmare, pentru a genera un mesaj de dispersie σ_y^2 trebuie ca zgomotul alb care excită sistemul dinamic generator să se caracterizeze prin [3]:

$$N_o/2 = 2\sigma_y^2/k.$$

5.16. *Fie un mesaj* m(t) *cu densitatea spectrală de putere*

$$S_{mm}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

transmis pe un canal cu zgomot alb aditiv n(t) *cu densitatea spectrală de putere* $S_{nn} = N_0/2$. *Știind că semnalul recepționat este*

$$r(t) = m(t) + n(t),$$

se cere:

a) *ecuația de stare a sistemului dinamic generator al mesajului* m(t) *și modelul acestui sistem, considerînd că zgomotul alb de excitație* u(t) *are funcția de autocovariație* $\mathbf{K}_{uu}(\tau) = \mathbf{Q}\delta(\tau)$; $\mathbf{Q} = [2a]$;

b) *cîștigul în regim permanent al filtrului optimal Kalman-Bucy,* **A**, *care estimează semnalul* $\hat{d}(t) = \hat{m}(t)$;

c) *ecuația erorii filtrului optimal Kalman-Bucy în regim tranzitoriu;*

d) *funcția de transfer* $H_{ok}(j\omega)$ *a filtrului optimal Kalman-Bucy în condițiile de la punctul „c";*

e) *raportul dintre funcția de transfer a filtrului optimal Kalman-Bucy* $H_{ok}(j\omega)$ *și funcția de transfer a filtrului optimal Wiener în condițiile de la punctul „c";*

f) *structura filtrului optimal Kalman-Bucy estimator al mesajului, ținînd cont de punctele „c" și „d".*

Soluție

a) Alegem drept variabilă de stare $x(t) = m(t)$. La ieșirea sistemului dinamic generator se obține semnalul $x(t)$ cu densitatea spectrală de putere

$$S_{xx}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{uu}(\omega),$$

unde $H(j\omega)$ este funcția de transfer a sistemului dinamic generator, iar

$$S_{xx}(\omega) = S_{mm}(\omega).$$

Deoarece

$$S_{uu}(\omega) = 2a,$$

rezultă

$$H(\dot{p}) = \frac{1}{a + p}. \tag{1}$$

Funcția de transfer $H(p)$ corespunde modelului de sistem dinamic

$$\dot{x}(t) = -a\,x(t) + u(t), \tag{2}$$

de unde rezultă

$$\mathbf{F} = [-a], \quad \mathbf{G} = [1].$$

Deoarece ieșirea este $y(t) = x(t)$, rezultă

$$\mathbf{C} = [1].$$

Adăugăm, în conformitate cu notațiile utilizate în breviarul teoretic în relațiile (5.25) și (5.26),

$$\mathbf{Q} = [2a], \quad \mathbf{P} = [N_0/2].$$

Modelul sistemului dinamic generator este reprezentat în figura 5.16,*a*.

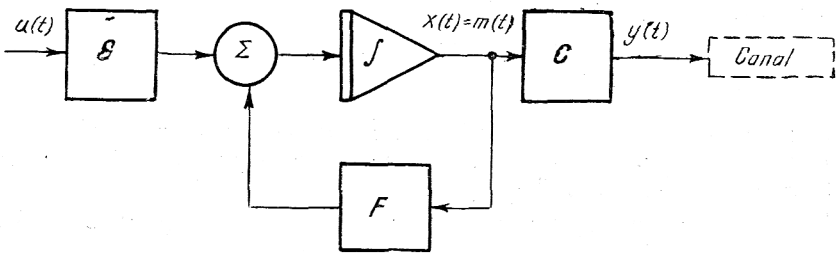


Fig. 5.16,*a*. Modelul sistemului dinamic generator al mesajului $m(t)$ cu densitatea spectrală de putere

$$S_{mm}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

b) Pentru a determina cîștigul $\mathbf{A}(t)$ în regim permanent trebuie să rezolvăm ecuația varianței (rel. (5.31)) în cazul $d\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}/dt = 0$.

$$\mathbf{F}\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} + \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{F}^T - \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{C}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T = 0. \tag{3}$$

Deoarece matricea de autocovariație a erorii se reduce la un singur element,

$$\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} = [k],$$

din relația (3) se obține ecuația

$$k^2 + aN_o k - aN_o = 0$$

de unde, alegînd, evident, rădăcina pozitivă, rezultă

$$k_o = \frac{1}{2}\left(-N_o a + \sqrt{N_O^2 a^2 + 4N_o a}\right). \tag{4}$$

Deoarece cîștigul se definește prin expresia (5.30) rezultă

$$\mathbf{A} = \frac{2}{N_0}[k_0].$$

c) În regim tranzitoriu cînd $\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} = [k(t)]$, ecuația variantei (5.31), devine

$$\frac{\mathrm{d}k(t)}{\mathrm{d}t} = -2a\,k(t) - \frac{2}{N_0}k^2(t) + 2a. \tag{5}$$

Pentru (5) se poate alege cea mai dezavantajoasă condiție inițială, adică se poate considera $k(t_0)$ drept eroare maximă, deci egală cu puterea mesajului util [1]:

$$k(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega)\,\mathrm{d}\omega,$$

unde

$$M(\omega) = \mathcal{F}\{m(t)\}.$$

d) Deoarece

$$H_{ok}(\mathrm{j}\omega) = \frac{AH(\mathrm{j}\omega)}{1 + AH(\mathrm{j}\omega)},$$

rezultă

$$H_{ok}(\mathrm{j}\omega) = a(-1 + \sqrt{1 + \lambda})\frac{1}{\mathrm{j}\omega + a\sqrt{1 + \lambda}},$$

unde

$$\lambda = 4/N_o a.$$

e) Funcția de transfer $H_o(\mathrm{j}\omega)$ a filtrului optimal Wiener de netezire a fost calculată în problema 5.5.

Făcînd raportul celor două funcții de transfer, se obține

$$H_{ok}(\mathrm{j}\omega)/H_{oW}(\mathrm{j}\omega) = const.$$

f) Structura filtrului optimal Kalman-Bucy este dată în figura 5.16,*b*.

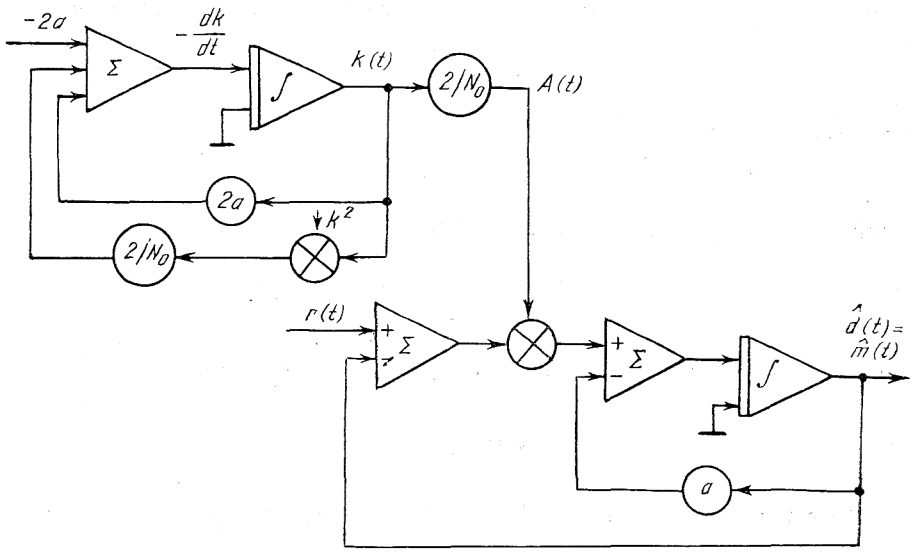


Fig. 5.16,*b*. Structura filtrului optimal Kalman-Bucy pentru recepția mesajului $m(t)$ cu densitatea spectrală de putere

$$S_{mm}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

5.17. *Fie un mesaj aleator* m(t) *care se transmite în urma unei modulații în amplitudine cu purtătoare suprimată cu ambele benzi laterale* (MA-PS), *pe un canal cu zgomot alb aditiv, semnalul modulat injectat în canal fiind*

$$y(t) = c(t)\, m(t),$$

unde purtătoarea este de forma

$$c(t) = \sqrt{2\,P_0}\cos \omega_0 t.$$

Densitatea spectrală de putere a zgomotului alb n(t) *de pe canal este* $S_{nn} = N_o/2$ *Știind că semnalul recepționat este*

$$r(t) = y(t) + n(t),$$

se cere:

a) *ecuația de stare a sistemului dinamic generator al mesajului* m(t) *și modelul acestui sistem, în cazul cînd* $m(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$, m(0) *și* $\dot{m}(0)$ *fiind variabile aleatoare gaussiene de valoare medie nulă și dispersie cunoscută;*

b) *cîștigul filtrului optimal Kalman-Bucy,* **A**(t), *care lucrează ca receptor (demodulator) optimal, și structura bloc a receptorului;*

c) *tipul filtrului buclei în raport cu frecvența purtătoarei* ω_0;

d) *să se simplifice structura receptorului de la punctul „b" la un sistem cu reacție unitară, ținînd cont de rezultatul de la punctul „c";*

e) *funcția de autocovariație și densitatea spectrală de putere a zgomotului echivalent care afectează semnalul de la intrarea buclei demodulatoare simplificate de la punctul „d";*

f) *să se rezolve ecuația variației în regim permanent în cazul în care* m(t) *este caracterizat prin densitatea spectrală de putere* $S_{mm}(\omega) = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$ *și să se arate că rezultatul este același atît în cazul structurii de la punctul „b", cît și în cazul buclei demodulatoare din modelul simplificat de la punctul „d" în condițiile din problema 5.22 punctul „a"*;

g) *cîștigul* $\mathbf{A}(t)$ *al demodulatorului Kalman-Bucy în condițiile de la punctul „f" în funcție de raportul semnal/zgomot în cazul* MA-PS, λ_{MAPS};

h) *să se deducă funcția de transfer a demodulatorului optimal Kalman-Bucy care estimează mesajul* m(t) *caracterizat la punctul „f".*

Soluție

a) Mesajul $m(t)$ se scrie sub forma

$$m(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

unde

$$a = A_m \cos \varphi; \quad b = A_m \sin \varphi.$$

Dacă alegem variabilele de stare $x_1 = m(t)$ și $x_2 = \dfrac{\dot{x}_1}{\omega}$ obținem sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega x_2; \\ \dot{x}_2 = -\omega x_1, \end{cases}$$

unde $x_1(0) = a$ și $x_2(0)$ sînt variabile aleatoare gaussiene de valoare medie nulă și dispersie cunoscută.

Semnalul transmis se scrie sub forma

$$\mathbf{y}(t) = [c(t), \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{1}$$

astfel încît obținem matricele sistemului dinamic [6] în conformitate cu relațiile (5.24), (5.25)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [c(t), \ 0].$$

Modelul sistemului dinamic generator al mesajului $m(t)$ este prezentat în figura 5.17, *a*.

b) Deoarece matricele $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}(t)$ și $\mathbf{C}$ se reduc la:

$$\mathbf{P} = [N_o/2]; \quad \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}(t) = [k]; \quad \mathbf{C} = [c(t)],$$

rezultă cîștigul filtrului Kalman-Bucy

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}(t) \ \mathbf{C}^T(t) \frac{2}{N_o} = c(t) \frac{2}{N_o} [k].$$

Structura bloc a receptorului optimal este prezentată în figura 5.17,*b*.

c) Deoarece mesajul $m(t)$ are banda de frecvență mai mică decît frecvența purtătoarei ω_0, filtrul buclei este un filtru trece-jos în raport cu ω_0.

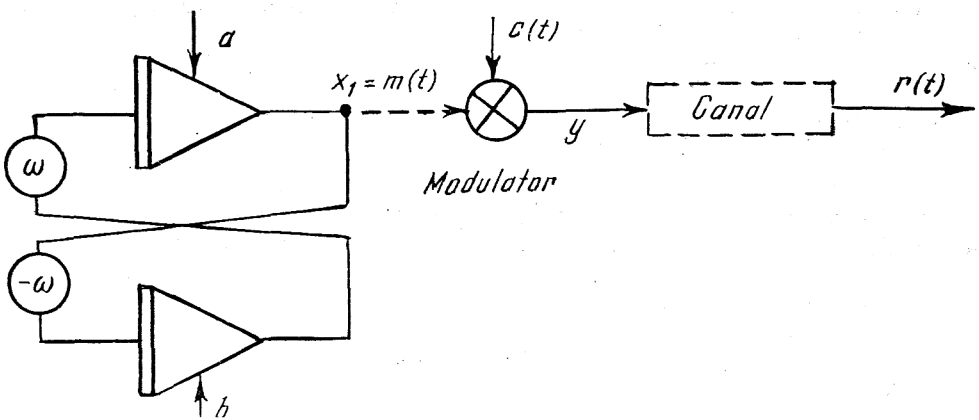


Fig. 5.17,*a*. **Modelul sistemului dinamic generator al mesajului** $m(t)$ **pentru o transmisiune** *MA-PS*.

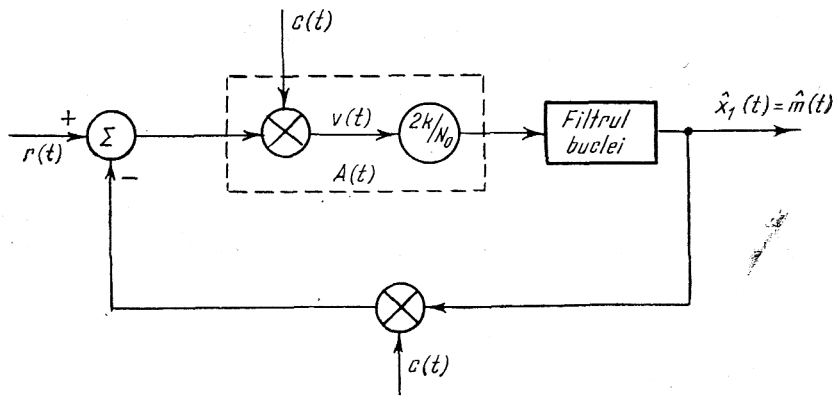


Fig. 5.17,*b*. **Structura bloc a receptorului optimal Kalman-Bucy în cazul transmisiunii** *MA-PS*.

d) Întrucît în structura din figura 5.17,*b* mesajul estimat $\hat{m}(t)$ este multiplicat în buclă de două ori prin semnalul purtător $c(t)$, efectuăm acest calcul

$$c^2(t)\hat{m}(t) = (\sqrt{2P_o})^2(\cos^2\omega_0 t)\hat{m}(t) = P_o(1 + \cos 2\omega_0 t)\,\hat{m}(t).$$

Mesajul estimat $\hat{m}(t)$ nu are componente de frecvențe apropiate de $2\omega_0$, astfel încît filtrul buclei FB va rejecta componenta de frecvență $2\omega_0$. În acest fel, semnalul $v(t)$ după multiplicatorul căii directe a buclei din figura 5.17,*b* va fi

$$\begin{aligned} v(t) &= c(t)[r(t) - c(t)\,\hat{m}(t)] = c(t)\,r(t) - c^2(t)\,\hat{m}(t) = \\ &= \sqrt{2P_o}\cos\omega_0 t\, r(t) - P_o(1 + \cos 2\omega_0 t)\,\hat{m}(t) \cong \\ &\cong \sqrt{2P_o}\cos\omega_0 t\, r(t) - P_o\hat{m}(t) = \\ &= P_o[r_e(t) - \hat{m}(t)], \end{aligned} \tag{2}$$

unde am notat

$$r_e(t) = \sqrt{\frac{2}{P_o}}\cos\omega_0 t\, r(t). \tag{3}$$

În conformitate cu relația (2), receptorul optimal din figura 5.17,*b* se simplifică după cum se arată în figura 5.17,*c*.

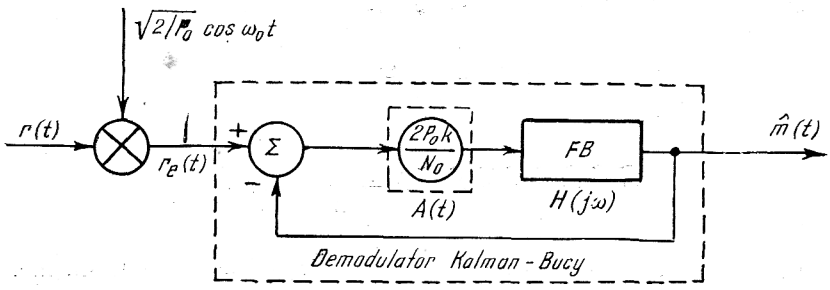


Fig. 5.17,*c*. Structura bloc simplificată a receptorului optimal Kalman-Bucy în cazul transmisiunii *MA-PS*.

e) La intrarea buclei demodulatoare se aplică semnalul

$$r_e(t) = r(t)\sqrt{2/P_o}\cos\omega_0 t; \tag{4}$$

relația devine

$$\begin{aligned} r_e(t) &= \sqrt{2/P_o}\cos\omega_0 t\,[\sqrt{2P_0}\cos\omega_0 t\cdot m(t) + n(t)] = \\ &= 2\cos^2\omega_0 t\, m(t) + \sqrt{2/P_o}\cos\omega_0 t.n(t) = \\ &= (1+\cos 2\omega_0 t)\, m(t) + \sqrt{2/P_o}\cos\omega_0 t\cdot n(t) \cong \\ &\cong m(t) + n_s(t) + \cos 2\omega_0 t\cdot m(t), \end{aligned} \tag{5}$$

unde

$$n_s(t) = \sqrt{2/P_o}\cdot\cos\omega_0 t\cdot n(t). \tag{6}$$

Termenul de frecvență dublă se neglijează deoarece filtrul trece-jos din bucla demodulatorului taie componentele de frecvență dublă.

Din relația (5) se obține:

$$r_e(t) \cong m(t) + n_s(t),$$

zgomotul echivalent fiind $n_s(t)$ dat de formula (6).

Funcția de autocovariație a lui $n_s(t)$ este

$$R_{n_s n_s}(\tau) = \widetilde{n(t)n(t+\tau)}.\sqrt{2/P_o}\cos\omega_0 t.\sqrt{2/P_o}\cos\omega_0(t+\tau). \tag{7}$$

Deoarece procesele $n(t)$ și $\cos\omega_0(t)$ sînt independente, relația (7) devine

$$R_{n_s n_s}(\tau) = R_{nn}(\tau)\frac{2}{P_o}\widetilde{\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)}. \tag{8}$$

Calculăm

$$\widetilde{\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)\,dt.$$

Deoarece

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)\,dt=\frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}[\cos\omega_0(2t+\tau)+\cos\omega_0\tau]dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau,$$

rezultă:

$$\widetilde{\cos\omega_0 t}\;\widetilde{\cos\omega_0(t+\tau)}=\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau. \tag{9}$$

Înlocuind în relația (8) rezultatul (9) și $R_{nn}(\tau)=\frac{N_o}{2}\delta(\tau)$, obținem:

$$R_{n_s n_s}(\tau)=\frac{N_o}{2}\cdot\frac{2}{P_o}\cdot\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau\,\delta(\tau)=\frac{N_o}{2P_o}\cos\omega_0\tau\,\delta(\tau).$$

Densitatea spectrală de putere a lui $n_s(t)$ se obține aplicînd teorema Wiener-Hincin:

$$S_{n_s n_s}(\omega)=\mathcal{F}\{R_{n_s n_s}(\tau)\},$$

de unde rezultă:

$$S_{n_s n_s}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_o}{2P_o}\cos\omega_0\tau\cdot\delta(\tau)\exp(-j\omega\tau)\,d\tau=\frac{N_o}{2P_o}\cdot \tag{10}$$

f) În cazul structurii de la punctul „*b*", matricele sistemului sînt

$$\mathbf{F}=[-a];\ \mathbf{G}=[1];\ \mathbf{Q}=[2a];\ \mathbf{P}=[N_o/2];$$

$$\mathbf{C}=[c(t)];\ \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}=[k].$$

Ecuația varianței în regim permanent devine

$$c^2(t)k^2+aN_o k-aN_o=0. \tag{11}$$

Deoarece filtrul buclei FB este un filtru trece-jos, care taie componenta de frecvență $2\omega_0$, se poate aproxima

$$c^2(t)=P_o(1+\cos 2\omega_0 t)\cong P_o$$

și ecuația (11) ia forma

$$k^2+\frac{aN_o}{P_o}k-\frac{aN_o}{P_o}=0. \tag{12}$$

Soluția convenabilă a ecuației (12) este

$$k_o=\frac{1}{2P_o}(-N_o a+\sqrt{N_o^2a^2+4N_o a P_o}).$$

În cazul buclei demodulatoare din modelul simplificat de la punctul „*d*", matricele sistemului sînt:

$$\mathbf{F}=[-a];\ \mathbf{G}=[1];\ \mathbf{Q}=[2a];\ \mathbf{P}=[N_o/2P_o];$$

$$\mathbf{C}=[1];\ \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}=[\tilde{k}].$$

Din ecuația variantei în regim permanent rezultă

$$\tilde{k}^2 + \frac{aN_o}{P_o}\tilde{k} - \frac{aN_o}{P_o} = 0. \tag{13}$$

Deoarece ecuațiile (12) și (13) sînt identice, rezultă

$$k_o = \tilde{k}_o.$$

g) În cazul structurii de la punctul „*b*" rezultă

$$A(t) = k\frac{2}{N_o}P_0 = -a + \sqrt{a^2 + \frac{4a}{N_o}P_0} = a\,(-1 + \sqrt{1 + \lambda_{MAPS}}),$$

unde

$$\lambda_{MAPS} = \frac{2/a}{N_0/2P_0} = \frac{4P_o}{N_o a}.$$

În cazul structurii de la punctul „*d*" rezultă, evident, același cîștig.

h) Funcția de transfer a demodulatorului optimal Kalman-Bucy este

$$H_o(j\omega) = \frac{AH(j\omega)}{1 + AH(j\omega)},$$

unde $H(j\omega) = 1/(a + j\omega)$ (v. problema 5.16).

Se obține în final

$$H_o(j\omega) = \frac{a(-1 + \sqrt{1 + \lambda_{MAPS}})}{a(-1 + \sqrt{1 + \lambda_{MAPS}}) + a + j\omega}.$$

Funcția $H_0(j\omega)$ caracterizează un filtru trece-jos de tipul celui dedus în cazul în care mesajul era nemodulat (v. problema 5.16) [3], [4].

5.18. *Un mesaj* m(t) *cu densitatea spectrală de putere*

$$S_{mm}(\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

este integrat într-un modulator integrator. Semnalul integrat

$$y(t) = \int_0^t m(t)\,dt$$

este transmis pe un canal cu zgomot alb aditiv cu densitatea spectrală de putere $S_{nn} = N_o/2$, *astfel încît semnalul recepționat este*

$$r(t) = y(t) + n(t).$$

Considerînd că zgomotul de excitație a sistemului dinamic generator al mesajului m(t) *are funcția de autocovariație* $\mathbf{K}_{uu}(\tau) = \mathbf{Q}\delta(\tau)$, *unde* $\mathbf{Q} = [2a]$, *se cere să se determine receptorul demodulator optimal care estimează mesajul* m(t).

Soluție

Alegem ca primă variabilă de stare—ieșirea modulatorului

$$x_o(t) = y(t)$$

și drept a doua variabilă de stare—chiar mesajul:

$$x_1 = m(t).$$

Se obțin ecuațiile de stare

$$\dot{x}_0 = x_1;$$
$$\dot{x}_1 = -a\,x_1 + u(t),$$

unde $u(t)$ este zgomotul alb care excită sistemul dinamic generator al mesajului $m(t)$.

Rezultă matricele sistemului

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0];$$

$$\mathbf{P} = [N_o/2]; \quad \mathbf{Q} = [2a].$$

Dacă notăm matricea

$$\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix},$$

atunci ecuația varianței în regim permanent devine:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -a \end{bmatrix} -$$
$$- \frac{2}{N_o}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[1 \quad 0]\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + 2a\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[0 \quad 1] = [\mathbf{0}]$$

sau, încă:

$$\begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} \\ -ak_{21} & -ak_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{12} & -ak_{12} \\ k_{22} & -ak_{22} \end{bmatrix} - \frac{2}{N_o}\begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{11}k_{12} \\ k_{21}k_{11} & k_{21}k_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} = [\mathbf{0}]. \qquad (1)$$

Deoarece $k_{ij} = k_{ji}$, $\forall i,j$ din ecuația matriceală (1) obținem următoarele trei ecuații scalare necesare:

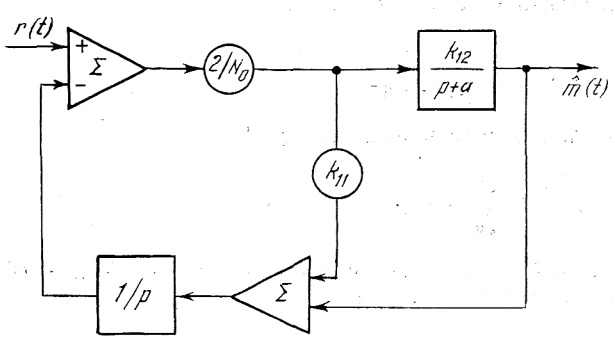


Fig. 5.18. Receptor optimal Kalman-Bucy pentru mesaj transmis prin modulator integrator.

$$\left.\begin{aligned} 2k_{12} - \frac{2}{N_0}k_{11}^2 &= 0 \\ k_{22} - ak_{12} - \frac{2}{N_0}k_{11}k_{12} &= 0 \\ -2ak_{22} - \frac{2}{N_0}k_{12}^2 + 2a &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Se rezolvă sistemul de ecuații (2) și se obține demodulatorul optimal Kalman-Bucy estimator al mesajului $m(t)$ din figura 5.18 [4].

5.19. *Să se rezolve problema* 5.18 *în cazul modulației de fază* (MP) *cînd semnalul transmis este de forma*

$$y(t) = A_0 \sin [\omega_0 t + \beta m(t)].$$

Să se determine receptorul-demodulator cuasi-optimal Kalman-Bucy în cazul cînd raportul semnal/zgomot al canalului $(A_0^2/(N_0 W_c)$ *este suficient de mare* (W_c — *banda canalului*).

Soluție

În acest caz semnalul recepționat este de forma

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{h}(t; \mathbf{m}(t)) + \mathbf{n}(t).$$

Notăm prin $\tilde{\mathbf{x}}$ și $\tilde{\mathbf{K}}_{\varepsilon\varepsilon}$ aproximanții estimaților $\hat{\mathbf{x}}$ și, respectiv, $\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}$.

Ecuația procesorului este (v. rel. (5.29))

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{A}}(t)\ [\mathbf{r}(t) - \mathbf{h}(t;\ \tilde{\mathbf{x}}(t))] \tag{1}$$

unde, în conformitate cu (5.30)

$$\tilde{\mathbf{A}}(t) = \tilde{\mathbf{K}}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{D}[\mathbf{h}(t;\ \tilde{\mathbf{x}})]\mathbf{P}^{-1},$$

$\mathbf{D}[\mathbf{h}(t; \tilde{\mathbf{x}})]$ fiind matricea iacobiană al cărei element de pe rîndul i și coloana j este

$$\partial h_j(t;\ \tilde{\mathbf{x}})/\partial \tilde{x}_i.$$

Ecuația varianței este (v. rel. (5.31)):

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{K}}_{\varepsilon\varepsilon}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{K}}_{\varepsilon\varepsilon} + \tilde{\mathbf{K}}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T + \tilde{\mathbf{K}}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{D}[\mathbf{D}(\mathbf{h}(t; \tilde{\mathbf{x}})]\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{r}(t) -$$

$$- \mathbf{h}(t;\ \tilde{\mathbf{x}})]\,\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}. \tag{2}$$

În cazul particular al problemei noastre, dacă notăm $x_1(t) = m(t)$, avem ecuația de stare

$$\dot{x}_1(t) = -ax_1 + u(t)$$

și

$$r(t) = A_0 \sin [\omega_0 t + \beta x_1(t)] + n(t),$$

unde

$$\mathbf{x} = [x_1];\ \mathbf{F} = [-a];\ \mathbf{G} = [1];$$

$$\mathbf{r}(t) = [r(t)];\ \mathbf{m}(t) = [m(t)];\ \mathbf{n}(t) = [n(t)];$$

$$\mathbf{h}(t;\ \mathbf{x}(t)) = [A_0 \sin(\omega_0 t + \beta x_1(t))];$$

$$\mathbf{D}[\mathbf{h}(t;\ \mathbf{x}(t)] = [\beta A_0 \cos(\omega_0 t + \beta\ x_1)].$$

Ecuațiile procesorului și variantei devin:

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -a\tilde{x}_1 + \frac{2\beta A_0}{N_0}\tilde{k}_{22}\cos(\omega_0 t + \beta\tilde{x}_1)[r(t) - A_0\sin(\omega_0 t + \beta\tilde{x}_1)];$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_{\varepsilon\varepsilon} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{K}}_{\varepsilon\varepsilon} + \tilde{\mathbf{K}}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - (2/N_0)\,\mathbf{M}\beta^2 A_0[r(t)\sin(\omega_0 t + \beta\tilde{x}_1) + A_0\cos(2\omega_0 t + 2\beta\tilde{x}_1)],$$

unde $\mathbf{M}(t)$ este o matrice simetrică al cărei element (i,j) este $\tilde{k}_{2i}\,\tilde{k}_{2j}$. Să examinăm termenul

$$r(t)\sin(\omega_0 t + \beta\tilde{x}_1) = n(t)\sin(\omega_0 t + \beta\tilde{x}_1) + A_0\sin(\omega_0 t + \beta x_1)\sin(\omega_0 t + \beta\tilde{x}_1) = n(t)\sin(\omega_0 t + \beta\tilde{x}_1) + \frac{1}{2}A_0\cos\beta(x_1 - \tilde{x}_1) - \frac{1}{2}A_0\cos(2\omega_0 t + \beta x_1 + \beta\tilde{x}_1).$$

Deoarece

$$\frac{1}{2}A_0\cos\beta(x_1 - \tilde{x}_1) = \frac{1}{2}A_0 - \frac{1}{4}A_0\beta^2(x_1 - \tilde{x}_1)^2 + \ldots,$$

obținem:

$$r(t)\sin(\omega_0 t + \beta\tilde{x}_1) \cong \frac{1}{2}A_0\left[1 + \frac{2}{A_0}\,n(t)\sin(\omega_0 t + \beta\tilde{x}_1)\right],$$

după ce am neglijat termenii de frecvență dublă $2\omega_0$. Pentru un raport semnal/zgomot $(A_0^2/N_0 W_c)$ al canalului suficient de mare, termenul al doilea din paranteza din membrul drept este neglijabil și deci:

$$r(t)\sin(\omega_0 t + \beta\tilde{x}_1) \cong \frac{1}{2}A_0. \tag{3}$$

Ținînd cont de (3) și neglijînd termenii de frecvență dublă, ecuațiile procesorului (1) și variantei (2) devin

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -a\tilde{x}_1 + \frac{2\beta A_0}{N_0}\,\tilde{k}_{22}r(t)\cos[\omega_0 t + \beta x_1]$$

și respectiv

$$\dot{\tilde{k}}_{22} = -2a\tilde{k}_{22} + 2a - \frac{\beta^2 A_0^2}{N_0}\tilde{k}_{22}^2. \tag{4}$$

Valoarea lui $\tilde{k}_{22}$ se deduce din ecuația (4) scrisă în regim permanent ($\dot{\tilde{k}}_{22} = 0$). Se obține structura demodulatorului cuasi-optimal din figura 5.19 [4].

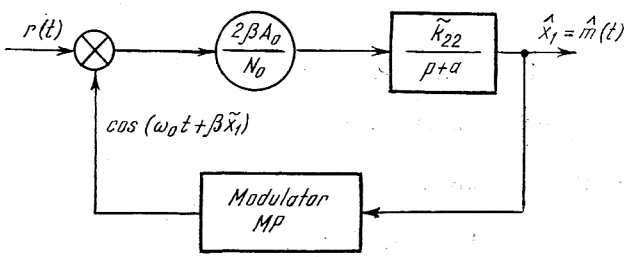


Fig. 5.19. Receptor cuasi-optimal Kalman-Bucy pentru semnale *MP*.

5.20. *Fie un semnal* m(t) *caracterizat prin densitatea spectrală de putere*

$$S_{mm}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^4}.$$

Se cere:

a) *funcția de autocorelație (autocovariație) a semnalului* m(t);
b) *funcția de transfer a filtrului invers de albire;*
c) *funcția de transfer a filtrului optimal Wiener de predicție care estimează semnalul dorit* $d(t) = m(t + \alpha)$, $\alpha > 0$;
d) *funcția pondere a filtrului optimal de la punctul „c"*[2].

5.21. *Fie o tensiune aleatoare* e(t) *care apare la bornele unui circuit paralel* RLC *comandat de o sursă de curent* i(t) *de tip zgomot alb (fig.* 5.21), $\omega_0^2 = 1/LC$, $Q = R/\omega_0 L$.

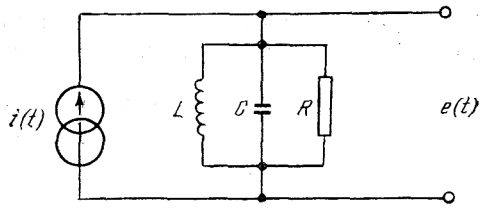


Fig. 5.21. Generator de tensiune comandată de o sursă de eurent de tip zgomot alb.

Se cere:

a) *să se găsească densitatea spectrală de putere a tensiunii de ieșire* $S_{ee}(\omega)$ *în funcție de* ω_0, L *și* Q *presupunînd că* $S_{ii}(\omega) = 1$;
b) *să se arate că pentru* $\alpha = j\omega/\omega_0$, *și* $Q^2 \gg 1$, *se obține funcția de transfer*

$$G(j\omega) = G(\alpha\omega_0) = \frac{\alpha}{(\alpha + 1/2Q - j)(\alpha + 1/2Q + j)};$$

c) *să se arate că funcția de transfer a filtrului optimal Wiener de predicție pentru* e(t) *(utilizînd un trecut infinit), în condițiile de la punctul „b", este*

$$H(j\omega) = \exp\left(-\frac{\omega_0\lambda}{2Q}\right) \sin\omega_0\lambda \left(\operatorname{ctg}\omega_0\lambda - \frac{1}{2Q} - \frac{\omega_0}{j\omega}\right),$$

unde λ *este timpul de predicție* [5].

5.22. *Fie un semnal* x(t) *staționar eșantionat cu ajutorul unui semnal* p(t) *necorelat cu* x(t), *astfel încît la ieșirea eșantionorului avem*

$$y(t) = x(t)\, p(t),$$

unde

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - t_n),$$

$h(t)$ descriind forma impulsurilor de eșantionare, iar $\{t_n\}$ fiind momentele de eșantionare. Știind că

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)d\sigma = 1,$$

că valoarea medie a lui $p(t)$ *este* β *(unde* β *este numărul mediu de puncte de eșantionare în unitatea de timp) și că momentele de eșantionare* $\{t_n\}$ *constituie un proces staționar punctual independent de* $x(t)$, *se cere* [7], [9]:

a) *să se arate că:*

$$R_{xy}(\tau) = \beta R_{xx}(\tau);$$
$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) R_{pp}(\tau);$$
$$S_{xy}(\omega) = \beta S_{xx}(\omega);$$

b) *să se arate că*

$$S_{yy}(\omega) = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega - \Omega) \mid H(\Omega) \mid^2 \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\Omega) \right\} d\Omega, \qquad (1)$$

unde $H(\Omega) = \mathfrak{F}\{h(t)\}$, $S_{ss}(\omega)$ *reprezintă densitatea spectrală a procesului*

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_n),$$

$f_n(.)$ *reprezintă densitatea de probabilitate asociată cu lungimea a* n *intervale consecutive în procesul punctual* $\{t_n\}$, *iar* $F_n(\omega) = \mathfrak{F}\{f_n(.)\}$, *știind că*

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \sigma) s(\sigma)\, d\sigma$$

și

$$S_{ss}(\omega) = \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\omega);$$

c) *să se particularizeze rezultatul* (1) *cînd eșantionarea se face cu impulsuri Dirac,* $h(t) = \delta(t)$;

d) *să se deducă funcția de transfer* $G_{on}(j\omega)$ *a filtrului optimal nerealizabil Wiener care reconstruiește (interpolează) semnalul original din cel eșantionat (estimează* $d(t) = x(t)$*), în cazul eșantionării ideale periodice* $\left(\beta = \frac{1}{T}, f_n(\sigma) = \right.$

$\left. = \delta(\sigma - nT),\ F_n(\omega) = e^{-j\omega nT} \right)$;

e) *să se arate ce devine funcția* $G_{on}(j\omega)$ *de la punctul „d" cînd* $x(t)$ *este semnal de bandă limitată* $(-W, W)$;

f) *să se calculeze eroarea filtrului optimal interpolator în condițiile punctelor „d" și „e"*;

g) *să se repete punctele „d" și „f" în cazul cînd* $\{t_n\}$ *constituie un proces Poisson cu*

$$f_n(\sigma) = \beta \frac{(\beta\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta\sigma}, \quad \sigma > 0.$$

Indicație: vezi [7].

5.23. *Să se calculeze eroarea unui filtru optimal Wiener realizabil cu funcția de pondere*

$$h_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & 0 \leqslant t \leqslant T,\ A > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

care estimează semnalul dorit d(t) = m(t), *unde mesajul* m(t) *se caracterizează prin funcția de autocovariație*

$$K_{mm}(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau,$$

transmisia mesajului fiind efectuată pe un canal cu zgomot alb aditiv. Care este valoarea erorii în cazul $\omega_0 = 0$?

Indicație

Formula care dă eroarea (v. rel. 5.18)

$$e_0 = K_{dd}(0) - \int_0^\infty h_0(\tau) K_{dm}(\tau) d\tau,$$

ținînd cont că

$$K_{dd}(\tau) = K_{mm}(\tau);$$
$$K_{dm}(\tau) = K_{mm}(\tau),$$

devine

$$e_0 = K_{mm}(0) - \int_0^\infty h_0(\tau) K_{mm}(\tau) d\tau.$$

Înlocuim expresiile lui $K_{mm}(\tau)$ și $h_0(\tau)$ și obținem pentru $\omega_0 = 0$:

$$e_0 = A + (A/\alpha)\exp(-\alpha T).$$

5.24. *Fie un mesaj* m(t) *caracterizat prin densitatea spectrală de putere*

$$S_{mm}(\omega) = \frac{1 + \omega^2}{1 + \omega^4}.$$

Se cere:

a) *să se deducă funcția de transfer a filtrului optimal Wiener de predicție;*
b) *să se calculeze eroarea normată a predictorului dedus la punctul anterior* [3].

5.25. *Mesajul* m(t) *transmis pe un canal de comunicație cu zgomot alb aditiv* n(t) *se caracterizează prin*

$$S_{mm}(\omega) = \frac{1}{(\omega^2 + k^2)^2}.$$

iar zgomotul — prin

$$S_{nn} = \frac{N_0}{2}.$$

Se cere să se calculeze filtrul optimal Kalman-Bucy pentru semnalul dorit [3]:

$$d(t) = \frac{dm(t)}{dt}.$$

5.26. *Să se rezolve problema 5.18 în cazul modulației de frecvență* (MF) *cînd semnalul transmis este*

$$y(t) = A_0 \sin\left[\omega_0 t + d_f \int_{t_0}^t m(\tau)\, d\tau\right].$$

Să se determine receptorul-demodulator cuasi-optimal Kalman-Bucy în condiții similare cu cele din problema 5.19.

Indicație

Notăm:

$$x_0 = \int_{t_0}^{t} m(\tau)\mathrm{d}\tau;$$

$$x_1 = m(t).$$

Ecuațiile de stare sînt

$$\dot{x}_0 = x_1;$$

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + u(t);$$

$$h[t;\ \mathbf{x}(t)] = A_0 \sin[\omega_0 t + d_f x_0(t)].$$

Se deduce

$$\mathbf{D}[h(t;\ \mathbf{x})] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d_f A_0 \cos[\omega_0 t + d_f x_0(t)].$$

Ecuația procesorului este de tipul celei deduse în problema 5.19:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}} + \frac{2}{N_0}\begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} \\ \tilde{k}_{21} \end{bmatrix} d_f A_0\, r(t)\cos[\omega_0 t + d_f x_0(t)].$$

Ecuația simplificată a variantei este:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{K}}_{\varepsilon\varepsilon}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{K}}_{\varepsilon\varepsilon} + \tilde{\mathbf{K}}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - \frac{d_f^2 A_0^2}{N_0}\begin{bmatrix} \tilde{k}_{11}^2 & \tilde{k}_{11}\tilde{k}_{12} \\ \tilde{k}_{11}\tilde{k}_{12} & \tilde{k}_{12}^2 \end{bmatrix}$$

Pentru aflarea soluției de regim permanent se anulează termenul din membrul drept al relației de mai sus.

Structura demodulatorului MF cuasi-optimal Kalman-Bucy este prezentată în figură 5.26 [4].

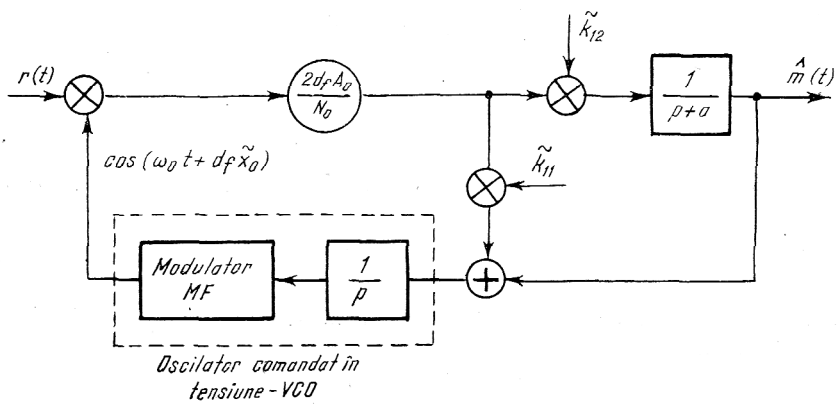


Fig. 5.26. Receptor cuasi-optimal Kalman-Bucy pentru semnale *MF*.

BIBLIOGRAFIE

. Spătaru, Al. *Teoria transmisiunii informației*, vol. II (Coduri și decizii statistice). Ed. Tehnică, București, 1971.

. Papoulis, A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1965.

. Van Trees, H. L. *Detection, Estimation and Modulation Theory*, vol. I, II, III. J. Wiley and Sons Inc., New York, 1968/1971.

. Snyder, D. L. *The State-Variable Approach to Continuous Estimation with Applications to Analog Communication Theory*. MIT-Press, Cambridge (Mass.), 1969.

. Davenport, W. B., Root, W. L. *Introduction to Random Signals and Noise*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1958.

. Sage, A. P., Melsa, J. L. *Estimation Theory with Applications to Communications and Control*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1971.

'. Leneman, O. A. Z. *On Finite Pulsewidth Sampling*. În: IEEE Trans. on Comm. Techn., COM-15, 1967, p. 718—719.

i. Nicolau, Ed. *Introducere în cibernetica sistemelor continue*. Ed. Tehnică, București, 1972.

). Murgan, A. T., Rădoi, C., Lăzărescu, V. *Introducere în discretizarea și refacerea semnalelor continue*. Atel. IPB, București, 1980.

CAPITOLUL 6

MODULAȚIA

INTRODUCERE TEORETICĂ

Prin **modulație** se înțelege *corespondența biunivocă dintre spațiul mesajelor și spațiul semnalelor transmise, realizată în scopul facilitării transmisiunii printr-un mediu dat, al obținerii de transmisiuni multiple și al măririi stabilității față de perturbații.*

Caracteristic pentru orice proces de modulație este utilizarea unei „purtătoare", care constituie un semnal cu proprietățile de a se distinge și separa de alte semnale purtătoare și de a avea parametri care pot fi variați în ritmul mesajului.

În funcție de natura purtătoarei, modulația poate fi:

- **modulație cu purtătoare sinusoidală;**
- **modulație cu purtătoare pulsatorie (modulație de impulsuri).**

- **Modulația cu purtătoare sinusoidală** poate fi:
- *modulație liniară* (ML) sau *modulație de amplitudine;*
- *modulație exponențială* (ME), care poate fi *modulație de frecvență* (MF) sau *modulație de fază* (MP).

- **Modulația cu purtătoare pulsatorie** poate fi:
- *modulație de impulsuri fără cuantizare (analogică);*
- *modulație de impulsuri cu cuantizare (digitală).*

Modulația de impulsuri analogică poate fi:

- *modulație de impulsuri în amplitudine* (MIA);
- *modulație de impulsuri în poziție* (MIP);
- *modulație de impulsuri în durată* (MID);
- *modulație de impulsuri în frecvență* (MIF).

Modulație de impulsuri digitală (cu discretizarea eșantioanelor) este: modulație de impulsuri în cod (MIC).

A. Modulația cu purtătoare sinusoidală

a. Modulația liniară (de amplitudine)

- **Modulația de amplitudine cu purtătoare și cu ambele benzi laterale** (MA)

În domeniul timp expresia semnalului modulat este

$$s_p(t) = [A_1 + m(t)] \cos(\omega_1 t + \varphi_1); \tag{6.1}$$

unde $m(t)$ reprezintă mesajul modulator, $A_1 > 0$, iar $s_p(t) = 0$ pentru $A_1 + m(t) < 0$.

Pentru modulația de amplitudine cu purtătoare și ambele benzi laterale (MA), expresia (6.1) poate fi pusă sub forma

$$s_p(t) = A_1\left(1 + \frac{\alpha}{A} m(t)\right) \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \tag{6.2}$$

unde

$$\alpha = \frac{A}{A_1} \text{ se numește } \textit{grad de modulație;} \tag{6.3}$$

$(-A)$ reprezintă valoarea instantanee negativă cea mai mare în valoare absolută a lui $m(t)$.

În domeniul frecvență expresia semnalului modulat în amplitudine este

$$S_p(\omega) = \pi A_1[e^{j\varphi_1}\delta(\omega - \omega_1) + e^{-j\varphi_1}\delta(\omega + \omega_1)] +$$

$$+\frac{1}{2}[e^{j\varphi_1}M(\omega - \omega_1) + e^{-j\varphi_1}M(\omega + \omega_1)], \tag{6.4}$$

unde

$$M(\omega) = F\{m(t)\}. \tag{6.5}$$

● **Modulația de amplitudine cu purtătoarea suprimată (MA-PS).** *În domeniul timp MA-PS* are expresia

$$s(t) = m(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \tag{6.6}$$

ceea ce corespunde *în domeniul frecvență* la

$$S(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_1} M(\omega - \omega_1) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_1} M(\omega + \omega_1). \tag{6.7}$$

● **Modulația de amplitudine cu banda laterală unică (MA-BLU).** Expresia semnalului *în domeniul frecvență*, cînd se transmite numai banda laterală superioară (respectiv numai banda inferioară), este

$$S_{1(\pm)}(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_1} M_{\pm}(\omega - \omega_1) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_1} M_{\mp}(\omega + \omega_1), \tag{6.8}$$

în care

$$M_-(\omega) = M(\omega), \qquad \omega < 0; \tag{6.9}$$

$$M_+(\omega) = M(\omega), \qquad \omega > 0, \tag{6.10}$$

ceea ce corespunde *în domeniul timp* la

$$s_{1(\pm)}(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \pm \frac{1}{2} H\{m(t)\} \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \tag{6.11}$$

unde $H\{m(t)\}$ semnifică transformarea Hilbert a semnalului $m(t)$.

○ **Notă.** În relațiile (6.6) și (6.9) se consideră semnul „+" pentru modulația cu bandă laterală superioară și respectiv semnul „−" pentru modulația cu bandă laterală inferioară.

● **Demodulația semnalelor modulate liniar** poate fi realizată prin *demodulație de înfășurătoare* sau *demodulație de produs*.

• *Demodulația de înfășurătoare* se aplică în cazul în care înfășurătoarea semnalului variază liniar cu mesajul. Ea este adecvată pentru modulația în amplitudine cu ambele benzi laterale și purtătoare.

• *Demodulația de produs (sincronă)*, adecvată în special pentru semnale *MA-PS* sau *MA-BLU*, se face prin intermediul unei noi modulații, analoagă cu aceea de la emisie (multiplicarea semnalului recepționat cu purtătoarea $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, urmată de trecerea printr-un filtru presupus ideal, cu timp de întîrziere nul și frecvența de tăiere Ω_0, avînd caracteristica de frecvență

$$F_0(\omega) = \begin{cases} 2, & \text{pentru } -\Omega_0 \leqslant \omega \leqslant \Omega_0 \\ 0, & \text{pentru } \omega < -\Omega_0,\ \omega > \Omega_0. \end{cases} \tag{6.12}$$

Frecvența Ω_0 satisface condiția

$$\Omega_M \leqslant \Omega_0 \leqslant \omega_1 - \Omega_M, \tag{6.13}$$

unde Ω_M este cea mai înaltă frecvență din spectrul mesajului.

MA — PS

În urma realizării produsului cu purtătoarea de la recepție, de frecvență ω_0 și fază φ_0, se obține

$$S^*(\omega) = \frac{1}{4}[e^{j(\varphi_0+\varphi_1)}M(\omega - \omega_1 - \omega_0) + e^{j(\varphi_0-\varphi_1)}M(\omega +$$

$$+ \omega_1 - \omega_0) + e^{-j(\varphi_0-\varphi_1)}M(\omega - \omega_1 + \omega_0) + e^{-j(\varphi_0+\varphi_1)}M(\omega + \omega_1 + \omega_0)] \tag{6.14}$$

care, trecută prin filtrul $F_0(\omega)$ (rel. (6.12)), conduce la spectrul $N(\omega)$)

$$N(\omega) = \frac{1}{2}e^{j\varphi_\Delta}M(\omega - \omega_\Delta) + e^{-j\varphi_\Delta}M(\omega + \omega_\Delta). \tag{6.15}$$

Acesta, în dcmeniul timp, devine

$$n(t) = m(t)\cos(\omega_\Delta t + \varphi_\Delta), \tag{6.16}$$

unde

$$\omega_\Delta = \omega_0 - \omega_1; \tag{6.17}$$

$$\varphi_\Delta = \varphi_0 - \varphi_1. \tag{6.18}$$

MA-BLU

De exemplu, *dacă se transmite banda laterală superioară*, după realizarea produsului sincron, la recepție, se obține spectrul $S^*_{1(+)}(\omega)$

$$S^*_{1(+)}(\omega) = \frac{1}{4}[e^{j(\varphi_0+\varphi_1)}M_+(\omega - \omega_1 - \omega_0) + e^{j(\varphi_0-\varphi_1)}M_-(\omega +$$

$$+ \omega_1 - \omega_0) + e^{-j(\varphi_0-\varphi_1)}M_+(\omega - \omega_1 + \omega_0) + e^{-j(\varphi_0+\varphi_1)}M_-(\omega + \omega_1 + \omega_0)]. \tag{6.19}$$

După trecerea prin filtrul $F_0(\omega)$ se obține spectrul $N(\omega)$

$$N(\omega) = \frac{1}{2}[e^{j\varphi_\Delta} M_-(\omega - \omega_\Delta) + e^{-j\varphi_\Delta} M_+(\omega + \omega_\Delta)], \tag{6.20}$$

are conduce în domeniul timp la semnalul

$$n(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos(\omega_\Delta t + \varphi_\Delta) - \frac{1}{2} \mathcal{H}\{m(t)\} \sin(\omega_\Delta t + \varphi_\Delta). \tag{6.21}$$

Dacă se transmite banda laterală inferioară, se obține

$$n(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos(\omega_\Delta t + \varphi_\Delta) + \frac{1}{2} \mathcal{H}\{m(t)\} \sin(\omega_\Delta t + \varphi_\Delta). \tag{6.22}$$

• *Interferențe în MA cu demodulație de înfășurătoare*

Se consideră semnalul util $s_1(t)$ și, respectiv, semnalul perturbator $s_2(t)$:

$$s_1(t) = A_1 e^{j\omega_1 t}; \tag{6.23}$$

$$s_2(t) = A_2 e^{j\omega_2 t}, \tag{6.24}$$

unde

$$a = \frac{A_2}{A_1} < 1. \tag{6.25}$$

Semnalul rezultant este

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = A(t) e^{j(\omega_1 t + \theta)}, \tag{6.26}$$

unde înfășurătoarea are expresia

$$A(t) = A_1 \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \omega_\Delta t} = A_1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\omega_\Delta t, \tag{6.27}$$

iar:

$$\omega_\Delta = \omega_2 - \omega_1;$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{a \sin \omega_\Delta t}{1 + a \cos \omega_\Delta t}. \tag{6.28}$$

S-au făcut următoarele notații:

$$\omega_\Delta = \omega_2 - \omega_1; \tag{6.29}$$

$$C_0 \cong 1 + \frac{a^2}{4}; \tag{6.30}$$

$$C_1 \cong a\left(1 - \frac{a^2}{8}\right). \tag{6.31}$$

Pentru cazul general, cînd ambele semnale sînt modulate și cînd

$$\left| \frac{A_2 + n(t)}{A_1 + m(t)} \right| \ll 1, \tag{6.32}$$

expresia înfășurătoarei devine

$$A(t) = A_1 + m(t) + A_2 \cos \omega_\Delta t + n(t) \cos \omega_\Delta t \tag{6.33}$$

și se obține raportul semnal/perturbație în prezența interferenței

$$\left(\frac{S}{P}\right) = 2 \frac{\widetilde{m^2(t)}}{A_2^2 + \widetilde{n^2(t)}}. \tag{6.34}$$

• *Interferențe în MA cu demodulație de produs*

În cazul cînd două semnale s_1 și s_2 au ambele benzi laterale simetrice există posibilitatea de a anula la punctul de recepție pe unul din ele, celălalt putînd fi recepționat în anumite condiții fără distorsiuni.

Dacă

$$m_1(t) \longrightarrow s_1(t),$$

$$m_2(t) \longrightarrow s_2(t),$$

atunci, după demodularea de produs cu purtătoarea locală se obține

$$n_1(t) = m_1(t) \cos[(\omega_0 - \omega_1)t + \varphi_0 - \varphi_1], \tag{6.35}$$

$$n_2(t) = m_2(t) \cos[(\omega_0 - \omega_2)t + \varphi_0 - \varphi_2]. \tag{6.36}$$

Dacă se urmărește eliminarea unuia dintre semnale la recepție, de exemplu a lui $n_2(t)$, se reglează frecvența și faza oscilatorului de la recepție astfel încît

$$\omega_0 = \omega_2 \quad \text{și} \quad \varphi_0 - \varphi_2 = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \text{ fiind un întreg.}$$

• *Zgomote de fluctuații la demodulatoarele de înfășurătoare*

Se consideră un semnal util

$$s_1(t) = (A_1 + m(t)) \cos \omega_1 t \tag{6.37}$$

și un semnal perturbator, care constituie zgomotul de fluctuații, reprezentat de

$$z(t) = V(t) \cos[\omega_2 t + \theta(t)], \tag{6.38}$$

unde $\theta(t)$ este o funcție aleatoare cu distribuție uniformă

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad \text{pentru } \theta \in (0, 2\pi); \tag{6.39}$$

iar

$$a = \left| \frac{V(t)}{A_1 + m(t)} \right| \ll 1. \tag{6.40}$$

Notînd cu $N(\omega)$ densitatea spectrală de putere a zgomotului de fluctuații reprezentat printr-o funcție simetrică față de frecvența centrală ω_1, se deduce raportul semnal/zgomot la ieșire

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_{ieșire} = \frac{\widetilde{m^2(t)}}{\frac{1}{\pi}\int_0^{\Omega_M} N(\omega + \omega_1)d\omega}. \tag{6.41}$$

În cazul zgomotului alb

$$N(\omega + \omega_1) = N_0 = 2\pi z_0, \tag{6.42}$$

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_{ieșire} = \frac{\widetilde{m^2(t)}}{2\Omega_M z_0}. \tag{6.43}$$

Pentru comparație, raportul semnal/zgomot la intrarea demodulatorului este

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_{intrare} = \frac{\widetilde{S_1^2(t)}}{2\Omega_M z_0} = \frac{\frac{1}{2}A_1^2 + A_1\widetilde{m(t)} + \frac{1}{2}\widetilde{m^2(t)}}{2\Omega_M z_0}. \tag{6.44}$$

• *Zgomote de fluctuații la demodulatoarele de produs*

Semnal MA

Considerînd pentru $s_1(t)$ și $z(t)$ expresiile (6.37) (6.38), în cazul zgomotului alb se deduce:

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_{ieșire} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\widetilde{m^2(t)}\cos^2(\varphi_0 - \varphi_1)}{2\Omega_M z_0}. \tag{6.45}$$

Raportul semnal/zgomot la intrarea demodulatorului este exprimat de relația (6.44).

Semnal MA-PS

Raportul semnal/zgomot la ieșire, în cazul zgomotului alb, este

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_{ieșire} = \frac{\widetilde{m^2(t)}\cos^2(\varphi_0 - \varphi_1)}{2\Omega_M z_0}. \tag{6.46}$$

Semnal MA-BLU

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_{ieșire} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\widetilde{m^2(t)}}{\Omega_M z_0}. \tag{6.47}$$

b. **Modulația exponențială**

• **Expresia în domeniul timp a semnalului modulat exponențial** este

$$s(t) = E_0 e^{j\Psi(t)} = E_0 e^{j(\omega_0 t + \Phi(t))}, \tag{6.48}$$

• *În cazul modulației de fază* ($M\Phi$),

$$\Phi(t) = m(t), \tag{6.49}$$

unde $m(t)$ reprezintă mesajul modulator,

$$\psi(t) = \omega_0 t + m(t) \tag{6.50}$$

și

$$s_\psi(t) = E_0 e^{j(\omega_0 t + m(t))}. \tag{6.51}$$

• *În cazul modulației de frecvență* (MF)

$$\omega_i = \omega_0 + m(t) \quad \text{(frecvență instantanee)}; \tag{6.52}$$

$$\Phi(t) = \int_0^t m(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{6.53}$$

și

$$s_f(t) = E_0 e^{j[\omega_0 t + \int_0^t m(\xi)\,d\xi]}. \tag{6.54}$$

● **Spectrul mesajului modulat exponențial**

În cazul cînd mesajul este

$$m(t) = M \cos \Omega t \tag{6.55}$$

și

$$\Omega \ll \omega_0, \tag{6.56}$$

se obține

$$s(t) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{j\left[\omega_0 t + n\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right]} \tag{6.57}$$

$$\beta = \Delta\varphi = M \qquad \text{în cazul } M\Phi; \tag{6.58}$$

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Omega} = \frac{M}{\Omega} \qquad \text{în cazul } MF. \tag{6.59}$$

Este uzual să se definească banda ocupată de semnalele modulate exponențial din condiția ca puterea componentelor pînă la ordinul N să conțină 99% din puterea semnalului, adică

$$2 \sum_{n=N+1}^{\infty} J_n^2(\beta) = 0{,}01, \tag{6.60}$$

relația (6.60) fiind satisfăcută pentru

$$n \geqslant N = \beta + 1, \tag{6.61}$$

deci, rezultă că lărgimea de bandă B este exprimată de relația

$$2\pi B = 2(\beta + 1)\Omega. \tag{6.62}$$

Dacă mesajul este format dintr-o sumă de sinusoide

$$m(t) = \sum_{K=1}^{M} a_K \cos(\Omega_K t + \varphi_K), \tag{6.63}$$

se poate aproxima că lărgimea de bandă este

$$B = 2\sum_{K=1}^{M}(\beta_K + 1)\,\Omega_K = \sum_{K=1}^{M} B_K. \tag{6.64}$$

● **Interferențe în sistemele cu modulație exponențială.** Se consideră că la intrarea în receptor apar două semnale cu modulație exponențială, de frecvențe instantanee $\omega_1(t)$ și $\omega_2(t)$:

$$s_1(t) = E_1 e^{j\int_0^t \omega_1(\xi)d\xi}; \tag{6.65}$$

$$s_2(t) = E_2 e^{j\int_0^t \omega_2(\xi)d\xi}, \tag{6.66}$$

unde $s_1(t)$ reprezintă semnalul util, iar $s_2(t)$ — semnalul perturbator, iar

$$a = \frac{E_2}{E_1} < 1. \tag{6.67}$$

Semnalul la intrarea în demodulator va fi

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = E_1\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\alpha}\, e^{j\psi(t)}, \tag{6.68}$$

unde

$$\alpha = \int_0^t \omega_\Delta(\xi)d\xi; \tag{6.69}$$

$$\omega_\Delta(t) = \omega_2(t) - \omega_1(t); \tag{6.70}$$

$$\psi(t) = \int_0^t \omega_1(\xi)d\xi + \varphi = \omega_{10}t + \Phi_1(t) + \varphi. \tag{6.71}$$

În relația (6.71):

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{a\,\sin\alpha}{1 + a\cos\alpha}, \tag{6.72}$$

ω_{10} reprezintă frecvența purtătoare a semnalului $s_1(t)$, iar $\Phi_1(t)$ — termenul variabil care conține informația.

Semnalul la ieșirea demodulatorului este

$$n_\varphi(t) = \Phi_1(t) + a\sin\int_0^t \omega_\Delta(\xi)d\xi, \text{ pentru } M\Phi; \tag{6.73}$$

$$n_f(t) = \Omega_1(t) + \omega_\Delta(t)a\cos\int_0^t \omega_\Delta(\xi)d\xi, \text{ pentru } MF, \tag{6.74}$$

unde

$$\Omega_1(t) = \frac{d\Phi_1(t)}{dt}. \tag{6.75}$$

Pentru a evalua raportul semnal/perturbație în cele două cazuri, se presupune

$$\Phi_1(t) = m(t), \qquad \text{în cazul } M\Phi, \tag{6.76}$$

$$\Omega_1(t) = m(t), \qquad \text{în cazul } MF. \tag{6.77}$$

Se deduce raportul semnal/perturbație la modulația de fază

$$\left(\frac{S}{P}\right)_{\varnothing} = \frac{\widetilde{m^2(t)}}{\frac{1}{2}a^2} = 2\frac{E_1^2}{E_2^2}\widetilde{m^2(t)}, \tag{6.78}$$

și la modulația de frecvență

$$\left(\frac{S}{P}\right)_F = \frac{\widetilde{m^2(t)}}{\frac{1}{2}(\omega_{20}-\omega_{10})^2 a^2} = 2\frac{\widetilde{m^2(t)}}{\omega_\Delta^2}\cdot\frac{E_1^2}{E_2^2} \tag{6.79}$$

unde

$$\omega_\Delta = \omega_{20} - \omega_{10}. \tag{6.80}$$

Dacă Ω_M reprezintă cea mai înaltă frecvență din spectrul mesajului, iar $\beta = \Delta\Phi = \dfrac{\Delta\omega}{\Omega_M}$, atunci se obține

$$\left(\frac{S}{P}\right)_\Phi = \beta^2\frac{E_1^2}{E_2^2}, \text{ pentru } M\Phi; \tag{6.81}$$

$$\left(\frac{S}{P}\right)_F = \beta^2\frac{E_1^2}{E_2^2}\left(\frac{\Omega_M}{\omega_\Delta}\right)^2, \text{ pentru } MF. \tag{6.82}$$

● **Zgomote de fluctuații în sistemele cu modulație exponențială**

Asupra semnalului modulat exponențial

$$s(t) = E_0 \cdot e^{j(\omega_0 t + \Phi(t))} \tag{6.83}$$

acționează zgomotul de fluctuații de bandă îngustă

$$z(t) = V(t)\cos(\omega_0 t + \theta(t)) \tag{6.84}$$

(se presupune că mijlocul benzii de trecere a receptorului coincide cu frecvența purtătoare a semnalului util).

Pentru $E_0 \gg |V(t)|$, (6.85)

dacă se notează cu $N(\omega)$ densitatea spectrală de puter e a zgomotului la intrarea demodulatorului, cu B — banda de trecere a receptorului, iar $f_M = \dfrac{\Omega_M}{2\pi} = B/2$ este frecvența de tăiere a filtrului demodulatorului, se deduce

raportul semnal/zgomot la ieșirea demodulatorului, cazul $M\Phi$, respectiv MF:

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_{\Phi} = E_0^2 \cdot \frac{\widetilde{m^2(t)}}{\frac{1}{\pi}\int_0^{\Omega_M} N(\omega + \omega_0)\mathrm{d}\omega}; \tag{6.86}$$

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_{F} = E_0^2 \frac{\widetilde{m^2(t)}}{\frac{1}{\pi}\int_0^{\Omega_M} \omega^2 N(\omega + \omega_0)\mathrm{d}\omega}. \tag{6.87}$$

Dacă ψ reprezintă sensibilitatea receptorului în unități KT (K — constanta lui Bolzmann, T — temperatura absolută), atunci pentru zgomot alb cu densitatea spectrală de putere $N(\omega + \omega_0) = N_0$

$$N_0 = 2\pi Z_0 = \psi KT; \tag{6.88}$$

$$E_{0\,min} = 4\,E_{ef\cdot zgomot} = 4\sqrt{2\pi B_f Z_0}, \tag{6.89}$$

unde B_f reprezintă banda de trecere a receptorului (anterior demodulării) exprimată în herți.

B. Modulația de impulsuri

a. Eșantionarea semnalelor

Funcția delta periodică de perioadă $T\left(T = \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$ este

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \tag{6.90}$$

Funcția delta de valoare medie a este

$$\delta_p(t) = aT \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{jn\omega_0 t}. \tag{6.91}$$

Funcția rectangulară periodică este

$$e_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT), \tag{6.92}$$

unde

$$f(u) = \begin{cases} A, & |u| \leqslant \dfrac{\tau}{2} \\ 0, & \dfrac{\tau}{2} < |u| < \dfrac{T}{2} \end{cases} \tag{6.93}$$

$$(\tau < T)$$

Expresia (6.92) se mai poate scrie

$$e_T(t) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n\omega_0 \frac{\tau}{2}}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} \cos n\omega_0 t, \tag{6.94}$$

unde

$$a = A \frac{\tau}{T}. \tag{6.95}$$

b. Modulația de impulsuri analogică

- **Modulația în amplitudine a impulsurilor (MIA)**

- *Legea de modulație.* În cazul modulației sincrone (*eșantionare uniformă*), legea de modulație este exprimată de relația

$$A = Km(nT), \tag{6.96}$$

$m(t)$ reprezentînd mesajul modulator, A — amplitudinea impulsului, T — perioada de eșantionare, K — o constantă.

Se presupune că eșantionarea se face cu funcția rectangulară periodică.

Pentru modulația asincronă (*eșantionarea naturală*) amplitudinea este proporțională cu valoarea semnalului în momentul evaluării:

$$A = km(nT + \mu). \tag{6.97}$$

Evaluarea se face în momentul $nT + \mu$, unde $\mu \leqslant \tau$(τ — lățimea impulsurilor rectangulare de eșantionare).

- *Spectrul impulsurilor modulate în amplitudine* (*MIA*) în cazul *eșantionării uniforme* cu perioada $T = 2\pi/\omega_0$ este

$$S_u(\omega) = a \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M(\omega - n\omega_0), \tag{6.98}$$

Din punct de vedere practic, se pot neglija componentele spectrale superioare frecvenței $\frac{2\pi}{\tau}$ $\left(\text{lărgimea de bandă ocupată fiind } B = \frac{2\pi}{\tau}\right)$. (6.99)

Spectrul impulsurilor modulate în amplitudine (*MIA*) în cazul *eșantionării naturale* este exprimat de relația

$$S_n(\omega) = \frac{1}{2} a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n\omega_0 \frac{\tau}{2}}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} [M(\omega - n\omega_0) + M(\omega + n\omega_0)]. \tag{6.100}$$

• **Modulația impulsurilor în poziție** (*MIP*)

• În cazul *eșantionării uniforme poziția p a impulsului față de momentul nT* este proporțională cu valoarea mesajului în momentul nT:

$$p = Km(nT). \tag{6.101}$$

În cazul *eșantionării naturale*, poziția p este proporțională cu valoarea semnalului în momentul $(nT + p)$:

$$p = Km(nT + p). \tag{6.102}$$

Se consideră un mesaj sinusoidal

$$m(t) = \Delta p \sin \Omega t, \tag{6.103}$$

unde Δp este valoarea absolută a deplasării impulsului.

• *Spectrul impulsurilor modulate în poziție.*

În cazul *eșantionării uniforme* cu un mesaj sinusoidal, momentul de apariție a impulsului se consideră de forma

$$t_n = nT - \Delta p \sin \Omega nT, \tag{6.104}$$

unde

$$\Delta p = \alpha < \frac{T}{2}. \tag{6.105}$$

Spectrul corespunzător al impulsurilor modulate în poziție este

$$S_u(\omega) = 2\pi a \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \sum_m \sum_n J_m(\omega \Delta p) \delta(m\Omega - \omega - n\omega_0) \tag{6.106}$$

(a și τ caracterizează funcția rectangulară eșantionatoare, conform relațiilor (6.92), (6.93), (.6.94), (6.95)).

În cazul *eșantionării naturale*, momentul t_n de apariție a impulsurilor, pentru un mesaj sinusoidal, se consideră de forma

$$t_n = nT - \Delta p \sin \Omega t_n, \tag{6.107}$$

semnalul *MIP* având un spectru de forma

$$S_n(\omega) = 2\pi \cdot a \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \sum_n \sum_m J_m(n\omega_0 \Delta p) \left\{ \delta(\omega - n\omega_0 - m\Omega) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \Omega \Delta p \delta[\omega - n\omega_0 - (m-1)\Omega] + \frac{1}{2} \Omega \Delta p \delta[\omega - n\omega_0 - (m+1)\Omega] \right\}. \tag{6.108}$$

- **Modulația în durată**
- *Legea de modulație*

Pentru *eșantionarea uniformă*, relația de definiție a modulației în durată este

$$\tau = Km(nT), \tag{6.109}$$

iar pentru *eșantionarea naturală*

$$\tau = Km(nT + \tau), \tag{6.110}$$

unde τ reprezintă durata (lățimea) impulsului purtător de informație.

- *Spectrul impulsurilor modulate în durată*

Dacă se consideră un mesaj sinusoidal în (6.109) pentru *eșantionarea uniformă*, durata impulsurilor este proporțională cu valoarea mesajului în momentele de eșantionare, conform relației

$$\tau = \tau_0 - \Delta\tau \sin \Omega nT. \tag{6.111}$$

Spectrul impulsurilor modulate în durată rezultă de forma

$$S_u(\omega) = 2\pi \frac{a}{j\omega} \sum_m \sum_n \left\{ J_m(\omega\Delta\tau)\delta(m\Omega - \omega - n\omega_0) - e^{-j\omega\tau_0} \sum_n \delta(\omega - n\omega_0) \right\}, \tag{6.112}$$

unde $a = A/T$, A fiind valoarea de vîrf a impulsurilor.

Pentru *eșantionarea naturală*, durata unui impuls este proporțională cu valoarea mesajului în momentul evaluării, adică

$$\tau = \tau_0 - \Delta\tau \sin \Omega t. \tag{6.113}$$

Spectrul semnalului modulat este

$$S_n(\omega) = 2\pi \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{A}{T} \left\{ \sum_n \sum_m J_m(n\omega_0\Delta\tau)[\delta(\omega - n\omega_0 - m\Omega) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\Omega(\Delta\tau)\delta[\omega - n\omega_0 - (m-1)\Omega] + \frac{1}{2}\Omega(\Delta\tau)\delta[\omega - n\omega_0 - (m+1)\Omega] -$$

$$\left. - e^{-j\omega\tau_0} \sum_n \delta(\omega - n\omega_0) \right\}. \tag{6.114}$$

- **Raportul semnal/zgomot**

- Raportul semnal/zgomot *la ieșirea demodulatorului MIA cu eșantionare uniformă* rezultă egal cu raportul semnal/zgomot la intrare:

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_{\substack{ieșire \\ MIA\ uniform}} = \left(\frac{S}{Z}\right)_{intrare} = \frac{\widetilde{m^2(t)}}{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\omega_\Delta} N(\omega)\,d\omega}, \tag{6.115}$$

unde $N(\omega)$ este densitatea spectrală de putere (definită pentru frecvențe pozitive) a perturbației la intrare, iar ω_Δ este lărgimea de bandă a receptorului (respectiv cea mai mare frecvență a mesajului).

• *În cazul unui semnal* MIA *cu eşantionare naturală,* raportul semnal/perturbaţie la ieşirea demodulatorului este

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_{\substack{ieşire\\ MIA\ natural}} = \frac{\widetilde{m^2(t)}}{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\omega_\Delta}\left(\frac{\sin\omega\frac{\tau}{2}}{\omega\frac{\tau}{2}}\right)^2 N(\omega)\,d\omega} > \left(\frac{S}{Z}\right)_{\substack{ieşire\\ MIA\ uniform}} \tag{6.116}$$

• *În cazurile* MIP *şi* MID (modulaţia în poziţie şi în durată a impulsurilor) problema raportului semnal/zgomot este aceeaşi, deoarece zgomotul introduce o nedeterminare în poziţia frontului impulsului modulat.

Dacă se notează cu σ valoarea efectivă a zgomotului şi cu V_1 — valoarea sa de vîrf:

$$V_V = 4\sigma, \tag{6.117}$$

atunci condiţia ca valoarea de vîrf a zgomotului să nu depăşească jumătate din amplitudinea A a semnalului modulat se exprimă sub forma

$$\sigma < \frac{A}{8}. \tag{6.118}$$

Raportul semnal/zgomot la ieşirea demodulatorului este

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_{\substack{ieşire\\ MIP\text{-}MID}} = \frac{A^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\widetilde{m^2(t)}}{\sigma^2}. \tag{6.119}$$

c. Modulaţia de impulsuri digitală

• **Modulaţia de impulsuri în cod (MIC)** se caracterizează prin aceea că valorile mesajului în punctele de eşantionare sînt aproximate prin valori discrete, astfel încît este posibilă transmisiunea în cod de impulsuri a fiecărui eşantion.

Dacă W reprezintă frecvenţa cea mai mare din spectrul unui mesaj $m(t)$, atunci

$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m\left(\frac{k}{2W}\right)\frac{\sin 2\pi W\left(t-\frac{k}{2W}\right)}{2\pi W\left(t-\frac{k}{2W}\right)}. \tag{6.120}$$

Se consideră că domeniul de variaţie al semnalului $m(t)$ este

$$-V \leqslant m(t) \leqslant V, \quad (V>0). \tag{6.121}$$

Mesajul $m(t)$ este substituit de mesajul $m_q(t)$, avînd expresia

$$m_q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m_q\left(\frac{k}{2W}\right) \frac{\sin 2\pi W\left(t - \frac{k}{2W}\right)}{2\pi W\left(t - \frac{k}{2W}\right)}, \tag{6.122}$$

unde:

$$m_q\left(\frac{k}{2W}\right) = m\left(\frac{k}{2W}\right) + \theta_k q. \tag{6.123}$$

q reprezintă intervalul minim de cuantizare a semnalului:

$$q = \frac{2V}{N}, \tag{6.124}$$

unde N reprezintă numărul nivelelor de cuantizare. θ_k este o variabilă aleatoare avînd densitatea de probabilitate

$$w(\theta_k) = \begin{cases} 1, & |\theta_k| < \frac{1}{2} \\ 0, & |\theta_k| > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{6.125}$$

- *Eroarea de cuantizare* este

$$e(t) = m_q(t) - m(t). \tag{6.126}$$

- *Puterea zgomotului de cuantizare*

$$\widetilde{\widetilde{e^2(t)}} = \frac{q^2}{12}. \tag{6.127}$$

- Rezultă *raportul semnal/zgomot de cuantizare*

$$\left(\frac{S}{P}\right)_q = \frac{\widetilde{\widetilde{m^2(t)}}}{\widetilde{\widetilde{e^2(t)}}} = 3N^2 \frac{\widetilde{\widetilde{m^2(t)}}}{V^2}. \tag{6.128}$$

Dacă se presupune că mesajul $m(t)$ este cuantizat într-un număr N de nivele și că un eșantion este transmis prin n impulsuri de durată τ, constituind un cuvînt de cod de durată T, atunci există relațiile

$$2^n = N, \qquad \tau = \frac{T}{n} \qquad \left(T \leqslant \frac{1}{2W}\right). \tag{6.129}$$

- *Banda semnalului* MIC este

$$B_T \geqslant \frac{1}{2\tau} \geqslant nw. \tag{6.130}$$

• Dacă asupra unui semnal *MIC* binar, în care

$$„1" \rightarrow +A(\text{volt});$$

$$„0" \rightarrow \quad 0\ (\text{volt}),$$

acționează un zgomot Gaussian aditiv cu dispersie σ^2 și valoare medie nulă și dacă probabilitățile celor două variabile binare sînt egale, atunci *probabilitatea de eroare* este

$$P_e = 1 - F(\rho), \tag{6.131}$$

în care

$$\rho = \frac{A}{2\sigma}; \tag{6.132}$$

$$F(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\rho} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \frac{1}{2} + \Phi(\rho); \tag{6.133}$$

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\rho} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

PROBLEME REZOLVATE

6.1. *Se consideră un semnal modulator multiton* $m(t) = K(2\cos \Omega t + \cos 2\Omega t + 3 \cos 5\Omega t)$, *care reprezintă intrarea unui sistem cu modulație în amplitudine* MA, *avînd indicele de modulație* $\alpha = 1$.

a) *Să se determine* K *astfel încît* m(t) *să fie normalizat* (A = 1).

b) *Să se reprezinte spectrul frecvențelor pozitive ale undei modulate.*

c) *Să se calculeze rapoartele* $\frac{P_{BL}}{P_p}$ *și* $\frac{P_p}{P_T}$, *în care* P_{BL} *reprezintă puterea pe bandă laterală,* P_p — *puterea purtătoarei,* P_T — *puterea medie transmisă*

Soluție

a) Din condiția de normalizare, pentru evitarea distorsionării anvelope

$$|m(t)| \leqslant 1$$

se deduce la limită

$$6K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{6}.$$

Expresia în domeniul timp a semnalului modulat în amplitudine este (relațiile (6.2), (6.3), pentru $\varphi_1 = 0$):

$$s_p(t) = A_1[1 + \alpha m(t)] \cos \omega_1 t =$$

$$= A_1\left[1 + \frac{1}{6}(2 \cos \Omega t + \cos 2\Omega t + 3 \cos 5\,\Omega t)\right] \cos \omega_1 t.$$

Această expresie poate fi pusă sub forma

$$s_p(t) = A_1 \cos \omega_1 t + \frac{A_1}{2}\left\{\frac{1}{3}[\cos(\omega_1 - \Omega)t + \cos(\omega_1 + \Omega)t] + \right.$$

$$+ \frac{1}{6}[\cos(\omega_1 - 2\Omega)t + \cos(\omega_1 + 2\Omega)t] + \frac{1}{2}[\cos(\omega_1 - 5\Omega)t +$$

$$\left. + \cos(\omega_1 + 5\Omega)t]\right\}.$$

b) În figura 6.1 este reprezentat spectrul de amplitudine, corespunzător acestei forme de undă ($f_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi}$ reprezintă frecvența purtătoare; $F = \frac{\Omega}{2\pi}$).

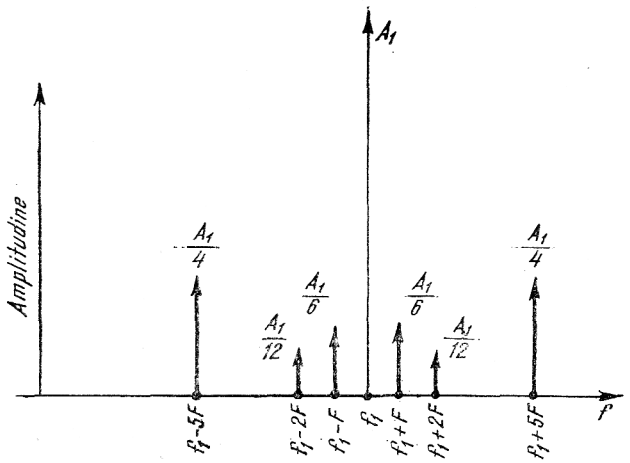


Fig. 6.1. Spectrul de amplitudine al semnalului *MA* din problema 6.1.

c) Puterea medie transmisă

$$P_T = \overline{s_p^2(t)} = A_1^2\{\overline{[1 + \alpha \cdot m(t)]^2 \cos^2 \omega_1 t}\}.$$

Dacă $f_1 \gg f_M$, unde f_M reprezintă frecvența maximă a semnalului, atunci

$$P_T = [1 + \alpha^2\ \overline{[m^2(t)]}\ \frac{A_1^2}{2}.$$

Dacă sursa de mesaje este ergodică,

$$\widetilde{\overline{m^2}} = \overline{m^2}.$$

Puterea purtătoarei ($A_1 \cos \omega_1 t$) este

$$P_p = \frac{A_1^2}{2}.$$

Puterea pe bandă laterală este

$$P_{BL} = \widetilde{\alpha^2}\widetilde{m^2}\frac{A_1^2}{4} = \frac{1}{2}\alpha^2\widetilde{m^2}\widetilde{P}_p.$$

Pentru condițiile problemei, în care

$$m(t) = \frac{1}{3}\cos\Omega t + \frac{1}{6}\cos 2\Omega t + \frac{1}{2}\cos 5\Omega t,$$

se deduce

$$\overline{(m^2(t))} = \frac{1}{18} + \frac{1}{72} + \frac{1}{8} = \frac{7}{36}.$$

Rezultă:

$$\frac{P_{BL}}{P_p} = \frac{\alpha^2\overline{[m^2(t)]}\,\frac{A_1^2}{4}}{\frac{A_1^2}{2}} = \frac{1}{2}\alpha^2[\overline{m^2(t)}] = \frac{1}{2}\overline{[m^2(t)]} = \frac{7}{72}.$$

$$\frac{P_p}{P_T} = \frac{\frac{A_1^2}{2}}{(1+\alpha^2\overline{[m^2(t)]})\frac{A_1^2}{2}} = \frac{1}{1+\overline{[m^2(t)]}} = \frac{36}{43}.$$

(Simbolul „—" indică medierea statistică, iar simbolul „~~~" medierea temporală).

6.2. *Se consideră semnalul de la problema 6.1, aplicat la intrarea unui sistem cu modulație în amplitudine cu purtătoarea suprimată și dublă bandă laterală* MA—PS. *Să se reprezinte spectrul de amplitudine al frecvențelor pozitive, să se construiască diagrama fazorială corespunzătoare și să se exprime anvelopa undei modulate.*

Soluție

$$m(t) = \frac{1}{3}\cos\Omega t + \frac{1}{6}\cos 2\Omega t + \frac{1}{2}\cos 5\Omega t.$$

Expresia semnalului *MA-PS* este (v. rel. (6.6) pentru $\varphi_1 = 0$)

$$s(t) = m(t)\cos\omega_1 t =$$

$$= \frac{1}{6}[\cos(\omega_1 - \Omega)t + \cos(\omega_1 + \Omega)t] + \frac{1}{12}[\cos(\omega_1 - 2\Omega)t +$$

$$+ \cos(\omega_1 + 2\Omega)t] + \frac{1}{4}[\cos(\omega_1 - 5\Omega)t + \cos(\omega_1 + 5\Omega)t].$$

Spectrul de amplitudine corespunde aceluia din figura 6.1, cu excepția purtătoarei $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$, care acum este suprimată.

Diagrama fazorială a oscilației *MA-PS* este reprezentată în figura 6.2. Rezultanta, care constituie *anvelopa*, este diagonala *OD* a rombului *OCDC'*, având direcția fazorului care reprezintă purtătoarea și care descrie o mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω_1.

Dacă se punctează conturul poligonal *OCBA* pe direcția *OD* se obține

$$OC\cos\gamma = \frac{1}{6}\cos\Omega t + \frac{1}{12}\cos 2\Omega t + \frac{1}{4}\cos 5\Omega t;$$

$$OD = r(t) = 2OC\cos x = \frac{1}{3}\cos\Omega t + \frac{1}{6}\cos 2\Omega t + \frac{1}{2}\cos 5\Omega t$$

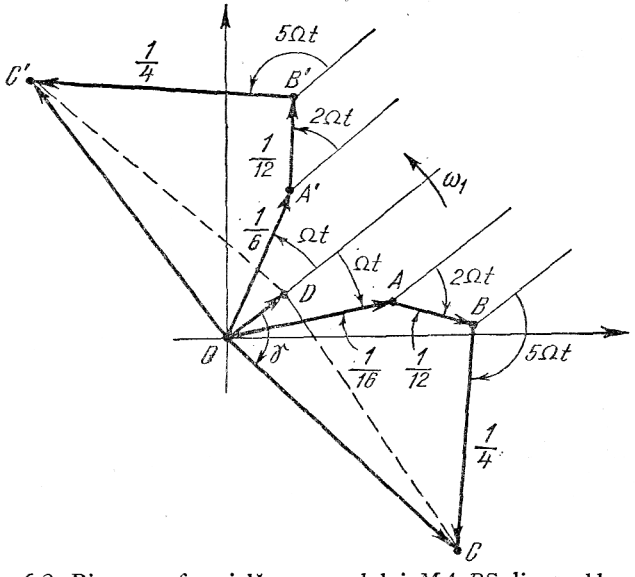


Fig. 6.2. Diagrama fazorială a semnalului *MA-PS* din problema 6.2.

6.3. *Se consideră* m(t) *un semnal telegrafic aleator (fig. 6.3,*a). *Să se deseneze forma de undă a oscilației modulate în amplitudine* (MA) *pentru valori ale indicelui de modulație* $\alpha = 0{,}5$ *și* $\alpha = 1$.

Soluție

Dacă oscilația este *MA*, conform relațiilor (6.2), (6.3), pentru $\varphi_1 = 0$)

$$s_p(t) = A_1(1 + \frac{\alpha}{A}\cdot m(t))\cos\omega_1 t$$

$$\alpha = \frac{A}{A_1}.$$

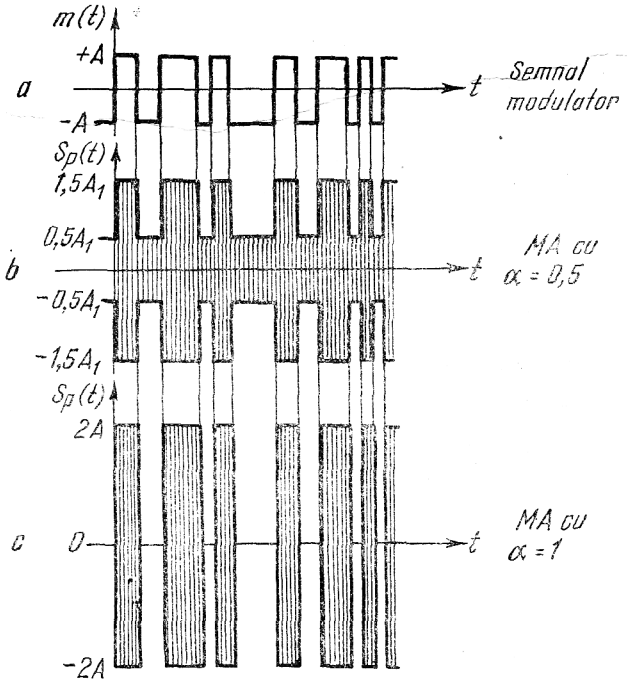


Fig. 6.3. Semnalul telegrafic aleator utilizat ca mesaj modulator (*a*). Semnalul corespunzător *MA* pentru $\alpha = 0{,}5$ (*b*). Semnalul corespunzător *MA* pentru $\alpha = 1$ (*c*).

În figurile 6.3, *b,c* sînt reprezentate formele de undă ale oscilației modulate pentru $\alpha = 0{,}5$ și $\alpha = 1$.

6.4. *Un nou sistem stereo compatibil de multiplexare a fazei cu modulație în amplitudine (Compatibile Phase Multiplex AM Stereosystem) este utilizat pentru transmiterea stereo în aceeași bandă de frecvență alocată pentru transmisiunile mono.*

Un semnal convențional cu modulație în amplitudine constă dintr-o purtătoare de amplitudine constantă și un set de componente laterale în fază cu purtătoarea, care conțin informația audio:

$$X(t) = [1 + M(t)] \cos \omega_0 t = \underbrace{\cos \omega_0 t}_{\text{purtătoare}} + \underbrace{M(t) \cos \omega_0 t}_{\text{benzi laterale}},$$

unde

X(t) *este semnalul transmis cu modulație în amplitudine;*

$M(t)$ — *semnalul modulator;*

t — *timpul;*

ω_0 $= 2\pi \times$ *frecvența purtătoare.*

În noul sistem propus, de tip CPM-AM *stereo, purtătoarea rămîne neschimbată, dar componentelor laterale li se aplică o rotație* θ *la stînga, respectiv la dreapta, conform formulei:*

$$V(t) = \underbrace{\cos \omega_0 t}_{\text{purtătoare}} + \underbrace{L(t) \cos (\omega_0 t - \theta)}_{\text{benzi laterale stînga}} + \underbrace{R(t) \cos(\omega_0 t + \theta)}_{\text{benzi laterale dreapta}},$$

unde:

V(t) este semnalul stereo transmis;

L(t) — *semnalul modulator al canalului stîng;*

R(t) — *semnalul modulator al canalului drept:*

$$\theta = \frac{\pi}{12} \text{ radian} = 15°.$$

Constrîngerile modulației sînt:

$$-0{,}8 \leqslant L(t) \leqslant 0{,}8;$$

$$-0{,}8 \leqslant R(t) \leqslant 0{,}8;$$

$$-1{,}0 < L(t) + R(t) < 1{,}25;$$

$$-1{,}0 \leqslant L(t) - R(t) \leqslant 1{,}0.$$

Se cere:

a) *să se arate că noul sistem propus conține componenta* L(t) + R(t) *transmisă ca la un sistem convențional* AM, *în fază cu purtătoarea, iar diferența* L(t) — R(t) *se adaugă la semnal ca un set de benzi laterale în cuadratură cu purtătoarea;*

b) *să se deducă diagramele vectoriale ale semnalelor transmise;*

c) *să se deducă schema bloc a sistemului de transmisie, bazat pe modulație* CPM *stereo.*

Soluție

a) Expresia semnalului cu modulație liniară de tip *CPM-AM* stereo poate fi transformată prin identități trigonometrice în

$$V(t) = \underbrace{\cos \omega_0 t}_{\text{purtătoare}} + \underbrace{[L(t) + R(t)] \cos\theta \cos \omega_0 t}_{\text{benzi laterale în fază}} + \underbrace{[L(t) - R(t)] \sin\theta \sin \omega_0 t}_{\text{benzi laterale în cuadratură}},$$

unde

$$\theta = 15°;$$

$$\cos\theta = 0{,}966;$$

$$\sin\theta = 0{,}259.$$

b) Această reprezentare a unui semnal *CPM-AM* stereo este prezentată în figura 6.4,*aβ*. în comparație cu diagrama unei *MA* monofonice din figura 6.4,*aα*.

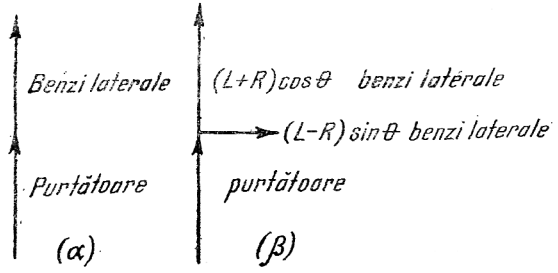


Fig. 6.4,*a*. Diagrama fazorială a semnalului *CPM-AM* stereo (β) comparativ cu aceea a semnalului *MA* monofonic (α).

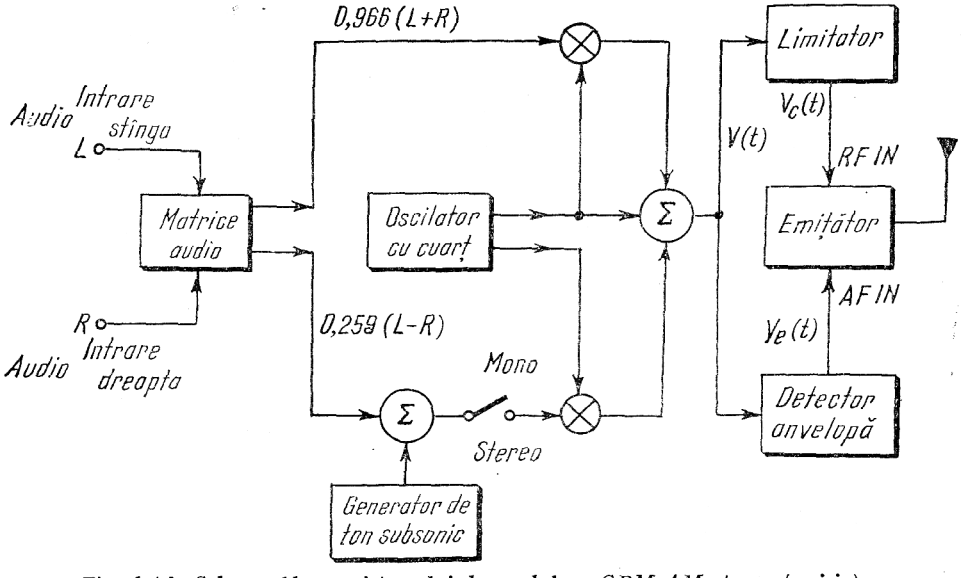


Fig. 6.4,*b*. **Schema bloc a sistemului de modulare** *CPM-AM* **stereo (emisia)**

c) În figura 6.4,*b*, respectiv în figura 6.4,*c*, sînt prezentate schemele bloc ale unui sistem de transmisiune CPM stereo (emisie, respectiv recepție).

În figura 6.4,*b* este prezentată *schema bloc a sistemului de modulare (emisia) CPM-AM stereo*. Plecînd de la semnalele audio $L(t)$ (left) și $R(t)$ (right), o matrice produce semnalele 0,966 $[L(t) + R(t)]$ și 0,259 $[L(t) - R(t)]$. Un semnal pilot de nivel scăzut este adunat la semnalul $L(t) - R(t)$ pentru a fi utilizat în comutația mono-stereo la recepție. Semnalul pilot este constituit dintr-o formă de undă sinusoidală de 20 pînă la 25 Hz, care dă o pereche de componente laterale, avînd nivelul cu 38 dB mai redus decît al purtătoarei. O pereche de modulatoare cu balans produc benzile laterale în fază și în cuadratură, la care este adăugată purtătoarea, obținîndu-se astfel semnalul complet *CPM-AM* stereo, de nivel scăzut. Se poate arăta prin identități trigonometrice că semnalul *CPM-AM*, $V(t)$, este egal cu produsul unei funcții anvelopă, $V_e(t)$, cu o purtătoare modulată în fază, $V_c(t)$.

$$V(t) = V_e(t) \cdot V_c(t);$$

$$V_e(t) = \sqrt{\{1 + [L(t) + R(t)] \cos\theta\}^2 + \{[L(t) - R(t)] \sin\theta\}^2};$$

$$V_c(t) = \cos\left\{\omega_0 t - \operatorname{arc\,tg} \frac{[L(t) - R(t)] \sin\theta}{1 + [L(t) + R(t)] \cos\theta}\right\}.$$

Semnalul $V_e(t)$ este obținut detectînd anvelopa semnalului *CPM-AM*, iar $V_c(t)$ rezultă din limitarea aceluiași semnal *CPM-AM*. Semnalul $V_e(t)$ este aplicat la intrarea audio a emițătorului, iar semnalul $V_c(t)$ este aplicat la intrarea de radiofrecvență a emițătorului. Emițătorul multiplică $V_e(t)$ și $V_c(t)$ și produce semnalul *CPM*. Această tehnică permite ca un emițător convențional *AM* să fie adaptat pentru o transmisie stereo.

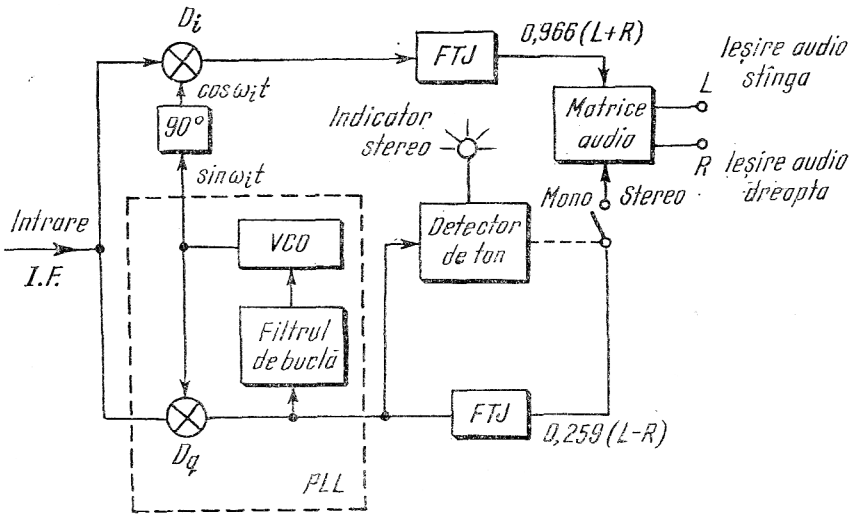


Fig. 6.4,*c*. Schema bloc a sistemului de demodulare *CPM-AM* stereo (recepția).

Receptorul din figura 6.4,*c* arată una dintre căile posibile pentru a demodula un semnal *CPM-AM* stereo. Receptorul are la intrare secțiunile convenționale de *RF* și *IF* (reprezentate în figură). Detectorul sincron, D_q, are două funcțiuni. Prima funcțiune este aceea de a servi ca detector de fază pentru sistemul PLL (Phase-Locked-Loop) și este realizată de D_q, filtrul buclei și oscilatorul controlat în tensiune (*VCO*).

Circuitul *VCO* lucrează pe frecvența intermediară (*IF*), avînd un defazaj de 90° față de purtătoarea *IF* de la intrare. Ca o a doua funcție, D_q demodulează direct componenta în cuadratură, $(L-R)$, a semnalului. Semnalul de ieșire *VCO* este rotit cu 90° și este utilizat pentru a demodula componenta $(L+R)$ în fază cu semnalul. Filtrele trece-jos (*FTJ*) elimină componentele frecvenței purtătoare de la ieșirea detectoarelor. O matrice audio reconstituie componentele L și R din $(L+R)$ și $(L-R)$. Un detector de ton subsonic indică prezența unei transmisii stereo și poate fi utilizat pentru a comuta receptorul între modurile de lucru mono și stereo. Receptorul poate fi plasat simplu în modul de lucru stereo, aducînd la „off" (eliminînd) intrarea $(L-R)$ a matricei audio.

6.5. *Să se determine lărgimea de bandă la un sistem cu modulație de frecvență* (MF) *atunci cînd modulația se face cu două semnale cosinusoidale de frecvențe* $f'_m = 5$ *kHz și* $f''_m = 10$ *kHz în cazul în care deviațiile de frecvență individuale (dacă semnalele s-ar aplica separat) ar fi* $\Delta f' = 2$ *kHz și* $\Delta f'' = 3$ *kHz.*

Soluție

Conform relației (6.59), în care $\Delta f = \frac{\Delta\Omega}{2\pi}$ și $f_m = \frac{\Omega}{2\pi}$, rezultă

$$\beta' = \frac{\Delta f'}{f'_m} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

și

$$\beta'' = \frac{\Delta f''}{f''_m} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Pentru un mesaj modulator conținînd două componente sinusoidale de forma (6.55), conform relației (6.54) rezultă expresia semnalului *MF*

$$s(t) = E_0 \cdot e^{j[\omega_0 t + \beta' \sin 2\pi f'_m t + \beta'' \sin 2\pi f''_m t]}$$

Deoarece

$$\beta' \text{ și } \beta'' \ll 1$$

se poate dezvolta $s(t)$ în serie, limitîndu-se la primii termeni:

$$s(t) = E_0 e^{j\omega_0 t} e^{j(\beta' \sin 2\pi f'_m t + \beta'' \sin 2\pi f''_m t)} \cong E_0 e^{j\omega_0 t}[1 + j\beta' \sin 2\pi f'_m t +$$

$$+ j\beta'' \sin 2\pi f''_m t] = E_0 (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t)(1 + j\beta' \sin 2\pi f'_m t + j\beta'' \sin 2\pi f''_m t].$$

Din transformări trigonometrice ale acestei expresii se vor obține componente de următoarele frecvențe:

$$f_0 + f'_m,\ f_0 - f'_m,\ f_0 + f''_m,\ f_0 - f''_m.$$

În acest caz, lărgimea de bandă este dată de componenta de frecvență maximă, deci rezultă

$$B_f = 2f''_m = 2 \cdot 10 = 20 \text{ kHz}.$$

6.6. *La intrarea unui receptor cu modulație în frecvență* (MF) *puterea semnalului util este* $P_u = 10^{-12} W$. *Sensibilitatea receptorului în unități* KT *este 100. Frecvența de modulație este* $f_m = 20$ *kHz* ($T = 300°K$; $K = 1{,}37 \cdot 10^{-23}$ *J/grad*); *semnalul modulator este sinusoidal. Care este deviația de frecvență* (Δf) *care dă valoarea maximă a raportului semnal/zgomot* (S/Z) *la ieșirea demodulatorului?*

Soluție

Particularizînd relația (6.87) pentru cazul zgomotului alb cu densitatea spectrală

$$N(\omega + \omega_0) = N_0 = 2\pi Z_0,$$

rezultă

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_F = \frac{3}{2} E_0^2 \frac{\widetilde{\widetilde{m^2(t)}}}{z_0 D_M^3}.$$

Pentru un semnal sinusoidal

$$m(t) = \Delta\omega \cos \Omega_M t,$$

se obține raportul semnal/zgomot

$$\left(\frac{S}{Z}\right)_F = 3\beta^2 \frac{E_0^2}{4\Omega_M Z_0}.$$

Cu:

$$\Omega_M = 2\pi f_M$$

s-a notat pulsația maximă din spectrul mesajului ($f_M = f_m$), iar

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Omega_M}$$

este indicele de modulație.

Raportul semnal/zgomot maxim se obține atunci cînd β este maxim, unde β este legat de banda corespunzătoare sistemului *MF* prin relația (6.62)

$$B = B_f = 2(\beta + 1) f_M,$$

sau

$$\beta = \frac{B_f}{2f_M} - 1,$$

deci trebuie determinat B_f.

Puterea utilă minimă este exprimată de relația

$$P_{u\,min} = \frac{1}{2} E^2_{0\,min}$$

unde, conform relațiilor (6.88) și (6.89)

$$E_{0\,min} = 4\sqrt{2\pi B_f Z_0} = 4\sqrt{\Psi K T B_f}.$$

Din ultimele două relații se deduce

$$P_{u\,min} = \frac{1}{2} E^2_{0\,min} = 8\Psi K T B_f.$$

Rezultă

$$B_f = \frac{P_u}{8\Psi K T} = \frac{10^{-12}}{8 \cdot 100 \cdot 1{,}37 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 0{,}3 \text{ MHz};$$

$$\beta = \frac{B_f}{2f_M} - 1 = \frac{0{,}3}{2 \cdot 0{,}02} - 1 = 6{,}5;$$

$$\Delta f = \beta \cdot f_M = 6{,}5 \cdot 0{,}02 = 130 \text{ kHz}.$$

6.7. *Să se demonstreze că valoarea pătratică medie a eșantioanelor semnalului* x(t).

$$\overline{x^2(kT)} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M} \sum_{k=-M}^{+M} x^2(kT)$$

este legată de puterea medie a semnalului

$$\widetilde{x^2(t)} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2(t)\, dt$$

prin relația:

$$\overline{x^2(kT)} = \widetilde{x^2(t)} + \widetilde{\left[\sum_{k=1}^{n} 2x^2(t) \cos k\omega_0 t\right]}$$

$$\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right).$$

Soluție

$$x^2(kT) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\ \delta\ (t - kT)\ \mathrm{d}t$$

sau

$$x^2(kT) = \lim_{M\to\infty} \int_{-MT}^{+MT} x^2(t)\ \delta(t - kT)\ \mathrm{d}t,$$

deci:

$$\overline{x^2\,(kT)} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M} \sum_{k=-M}^{+M} \int_{-MT}^{+MT} x^2(t)\ \delta(t - kT)\ \mathrm{d}t.$$

Considerînd funcția $\delta_p(t)$ pentru $a = 1$ (rel. 6.91)

$$\delta_p(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\pm\infty} \delta(t - kT)$$

sau

$$\delta_p(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\,\omega_0 t$$

$\left(\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}\right)$, înmulțind cu $x^2(t)$ cele două relații, integrînd de la $-MT$ la $+MT$ și împărțind apoi cu lungimea intervalului de integrare se obține:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{T}{2MT} \int_{-MT}^{+MT} x^2(t) \sum_{k=-M}^{+M} \delta(t - kT)\ \mathrm{d}t = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2MT} \int_{-MT}^{+MT} x^2(t)\ \mathrm{d}t +$$

$$+ \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2MT} \int_{-MT}^{+MT} 2x^2(t) \cos n\omega_0 t\ \mathrm{d}t.$$

De aici rezultă relația cerută.

6.8. *Se consideră mesajul* $\mathrm{m(t)} = \dfrac{\sin 2\pi \mathrm{Wt}}{2\pi \mathrm{Wt}}$ *eșantionat ideal cu funcția* $\delta_p(t)$ *la momentele* iT $(\mathrm{i} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, *în care* $\mathrm{T} = \dfrac{1}{\mathrm{f_s}}$, $\mathrm{f_s} = 2\mathrm{W} + \varepsilon$ *și* $0 < \varepsilon \ll \mathrm{W}$. *Să se reprezinte în domeniul timp și în domeniul frecvență semnalul eșantionat și să se discute cazul* $\varepsilon \to 0$.

Soluție

Conform expresiei (6.91) a funcției $\delta_p(t)$, rezultă

$$m^*(t) = aT \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(t)\, \delta\,(t - nT);$$

$$m^*(t) = aT \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi Wt}{2\pi Wt}\, \delta\left(t - \frac{n}{2W + \varepsilon}\right).$$

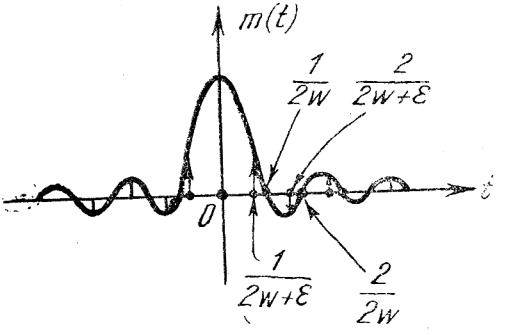


Fig. 6.8,*a*. Semnalul $m(t)$ eșantionat ideal cu funcția $\delta_p(t)$.

Se observă din figura 6.8,*a*, că punctele de eșantionare sînt apropiate de zerourile semnalului $m(t)$, care corespund punctelor $\frac{k}{2W}$, $(k = \pm 1, \pm 2...)$. Pe măsură ce k are o valoare mai mare, distanțele dintre punctele de anulare ale mesajului și momentele de eșantionare corespunzătoare se măresc.

Pentru $\varepsilon = 0$, aceste puncte de eșantionare coincid cu rădăcinile funcției $m(t)$, deci eșantionarea în aceste momente nu aduce o informație. Menținînd perioada $T = \frac{1}{2W}$, este necesară pentru recuperarea mesajului, o translare a momentelor de eșantionare în punctele t_0:

$$t_0 \pm \frac{1}{2W}, \quad t_0 \pm 2\,\frac{1}{2W}, \quad \cdots \quad \left(t_0 \neq 0,\ 0 < t_0 < \frac{1}{2W}\right).$$

Reconstituirea mesajului inițial, după o filtrare adecvată, este fără distorsiuni, deoarece operația se încadrează în condițiile teoremei de eșantionare

$$T = \frac{1}{2W + \varepsilon} < \frac{1}{2W}.$$

$$M^*(\omega) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M(\omega - n\omega_0),$$

unde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{1}{2W + \varepsilon};$$

$$\omega_0 = 2\pi(2W + \varepsilon).$$

În figura 6.8,*b* este reprezentat spectrul $M^*(\omega)$.

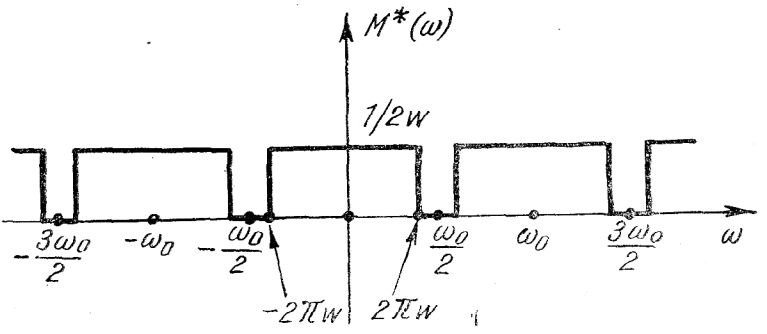


Fig. 6,8,*b*. Spectrul corespunzător $M(\omega)$.

6.9. *Să se deseneze spectrul de frecvență al impulsurilor modulate în amplitudine* (MIA), *în cazul eșantionării naturale și uniforme, pentru semnalul*

$$m(t) = \frac{\sin 2\pi W t}{2\pi W t},$$

eșantionat la $T \leqslant \frac{1}{2W}$, *cunoscîndu-se durata* τ *a impulsurilor de eșantionare.*

Soluție

$$M(\omega) = \mathcal{F}\{m(t)\} = \begin{cases} \frac{1}{2W}, & |\omega| \leqslant 2\pi W \\ 0, & |\omega| > 2\pi W \end{cases}$$

Pentru eșantionarea uniformă (rel. 6.98)

$$S_u(\omega) = a \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}} e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M(\omega - n\,\omega_0)$$

$$(\omega_0 = 2\pi/T > 4\pi W)$$

Pentru eșantionarea naturală (relația 6.100)

$$S_n(\omega) = \frac{1}{2} a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n\omega_0 \frac{\tau}{2}}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} [M(\omega - n\omega_0) + M(\omega + n\omega_0)]$$

În figurile 6.9,*a*,*b*,*c* sînt reprezentate formele de undă corespunzătoare relațiilor anterioare.

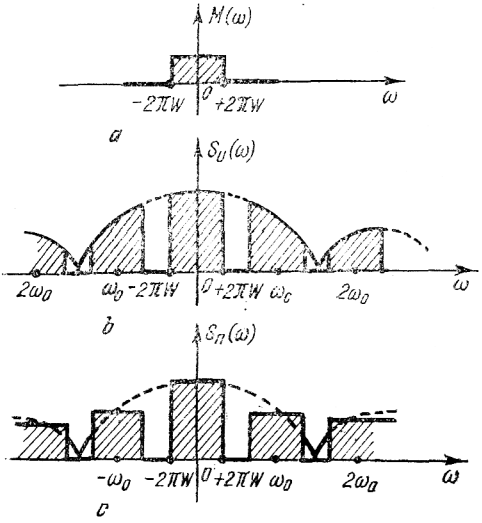


Fig. 6.9. Spectrul $M(\omega)$ al mesajului modulator (*a*). Spectrul $S(\omega)$ al semnalului corespunzător *MIA* în varianta eșantionării uniforme (*b*). Spectrul $S_n(\omega)$ al semnalului corespunzător *MIA* în varianta eșantionării naturale (*c*).

6.10. *Se va determina spectrul semnalului modulat obținut la ieșirea chopperului bipolar din figura* 6.10, *a*.

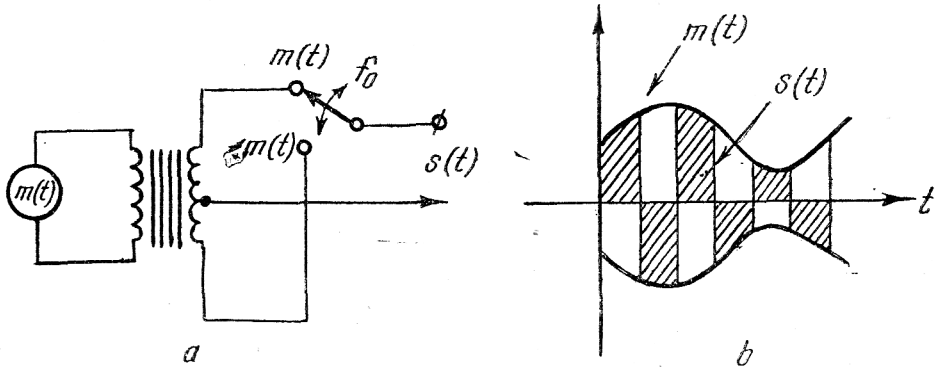


Fig. 6.10. Modulator de tip chopper bipolar (*a*). Ilustrarea formelor de undă corespunzătoare (*b*).

Soluție

Problema reprezintă un caz de modulație a impulsurilor în amplitudine (*MIA*) cu eșantionare naturală (instantanee), de forma

$$s(t) = m(t) \cdot p(t).$$

În această relație, $m(t)$ reprezintă mesajul, iar $p(t)$ — o funcție rectangulară periodică, cu valoarea medie nulă, a cărei formă reprezintă generalizarea relațiilor (6.92), (6.93):

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\left(t - kT_0;\ \frac{T_0}{2}\right),$$

în care

$$\pi(t - t_0; \tau) = \begin{cases} 1, & |t - t_0| < \dfrac{\tau}{2} \\ 0, & |t - t_0| > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}.$$

Pentru $\tau = \dfrac{T_0}{2}$, se scrie dezvoltarea în serie Fourier

$$p(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \cos (2k+1)\, \omega_0 t.$$

Se deduce

$$S(\omega) = F\,\{m(t) \cdot p(t)\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \{M[\omega - (2k+1)\omega_0] + M[\omega + (2k+1)\omega_0]\}.$$

6.11. *Se consideră un eșantionator practic, avînd forma impulsurilor*

$$p(t) = \cos 2\pi\,(4f_0)t, \quad |t| \leqslant \frac{T_0}{16}.$$

Dacă eșantionarea este uniformă, se cere să se determine funcția de transfer a filtrului egalizor pentru corectarea distorsiunilor de apertură.

Soluție

Expresia mesajului eșantionat uniform cu funcția $p(t)$ este

$$m^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m(kT_0)\, p(t - kT_0),$$

în care $m(t)$ reprezintă semnalul care se eșantionează.

Se deduce corespondența în domeniul frecvență:

$$S_u(\omega) = \frac{1}{T_0} P(\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M\,(\omega - k\omega_0),$$

în care

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0};$$

$$M(\omega) = F\,\{m(t)\};$$

$$P(\omega) = F\,\{p(t)\}.$$

Pentru corectarea distorsiunilor de apertură (datorate duratei diferite de zero a impulsurilor de eșantionare), se poate utiliza un filtru egalizor avînd funcția de transfer

$$H(\omega) = \frac{1}{P(\omega)}.$$

Se deduce

$$P(\omega) = F\{p(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 2\int_{0}^{\frac{T_0}{16}} \cos 8\pi \frac{t}{T_0} \cos \omega t\, dt =$$

$$= \frac{\cos \omega \frac{T_0}{16}}{4\omega_0 + \omega} + \frac{\cos \frac{\omega T_0}{16}}{4\omega_0 - \omega} = \frac{8\ \omega_0 \cos \frac{\omega T_0}{16}}{16\ \omega_0^2 - \omega^2}.$$

6.12. *Pentru comunicațiile prin fibre optice se utilizează diferite sisteme de modulație analogică în impulsuri, ca modulația impulsurilor în durată (Pulse Width Modulation) sau modulația impulsurilor în poziție (Pulse Position Modulation). O metodă nouă de modulație analogică propusă de cercetătorii japonezi Sato, Murata și Namekawa pentru transmisiunile video prin fibre optice este modulația simultană a impulsurilor în durată și în poziție (Pulse Interval and Width Modulation).*

a) *Să se imagineze schema bloc a unui sistem de transmisiune prin fibre optice a semnalelor video, utilizînd modulația simultană în durată și în poziție a impulsurilor și să se ilustreze formele de undă corespunzătoare acestei scheme.*

b) *Să se compare acest tip de modulație cu alte sisteme de modulație analogică în impulsuri, utilizate în comunicațiile optice.*

Soluție

a) În figura 6.12 sînt prezentate schema bloc a sistemului propus și formele de undă corespunzătoare în fiecare punct. Semnalul video de intrare *1* este aplicat la modulatorul impulsurilor în poziție și este modulat sub forma unui tren de impulsuri *2*, ale căror distanțe sînt proporționale cu amplitudinea semnalului de intrare la momentele de eșantionare. Fie frecvența medie de eșantionare 25MHz. Aceste impulsuri sînt aplicate la un bistabil de tip T și sînt convertite într-un tren de impulsuri modulate simultan în poziție și în durată *3*. Frecvența lor medie de repetiție este 12,5 MHz, care reprezintă jumătate din frecvența de eșantionare. Aceste impulsuri, care conțin informație atît în intervalul dintre două impulsuri succesive (modulație în poziție) cît și în lățimea impulsurilor, comandă o diodă foto emisivă (LED). Impulsurile optice modulate se transmit printr-o fibră optică, sînt detectate de o fotodiodă PIN și sînt convertite în impulsuri electrice. După amplificare și formare, impulsurile *4*, obținute la ieșirea triggerului din schemă corespund atît frontului crescător, cît și frontului descrescător al impulsurilor de la intrare. Aceste impulsuri comandă generarea unui semnal liniar-variabil *5*. Anvelopa acestei forme de undă liniar-variabile este identică cu semnalul video de intrare, fiind obținută prin trecerea semnalului *5* printr-un filtru trece-jos; rezultă la ieșire semnalul reconstituit *6*.

b) Modulația impulsurilor în poziție și durată face parte din categoria modulațiilor analogice în impulsuri de speța a doua (eșantionare naturală — modulație asincronă). Se observă că numărul de impulsuri pe secundă în sistemul de modulație simultană a impulsurilor în poziție și în durată este numai jumătate din numărul impulsurilor într-un sistem cu modulație în poziție sau cu modulație în durată a impulsurilor, caracterizate prin aceeași frecvență de eșantionare. Rezultă că banda de frecvență necesară sistemului

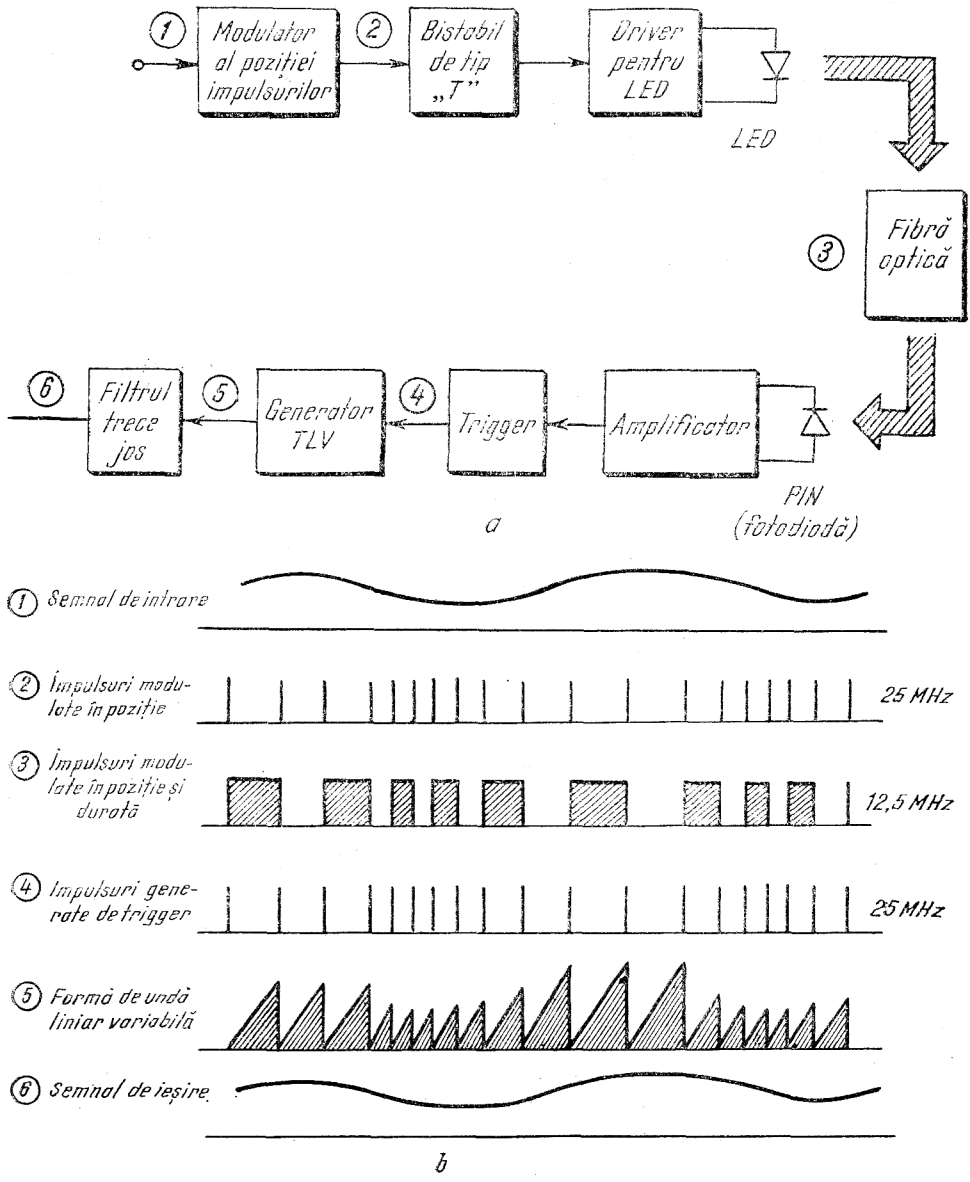


Fig. 6.12. Structura sistemului de transmisiune prin fibre optice a semnalului video utilizînd modulația în durată și poziție a impulsurilor (*PIWM*) (*a*). Formele de undă care caracterizează funcționarea sistemului *PIWM* din figura *a*(*b*).

le transmisiune propus este numai jumătate din banda de frecvență a sis-temului cu modulație în durată sau a aceluia cu modulație în poziție a impulsu-rilor.

6.13. *Să se imagineze un procedeu care să permită vizualizarea unor semnale de joasă frecvență pe ecranul tubului cinescop al unui receptor de televiziune standard, utilizînd modulația în poziție a impulsurilor (în varianta eșantionării naturale).*

Soluție

Obiectul transmisiei în sistemele de televiziune în alb-negru este imaginea optică plană a scenei captate, care poate fi prezentată sub forma unei funcții de trei argumente, $B(x, y, t)$, unde:

B este strălucirea unui punct oarecare al imaginii;

x, y sînt coordonatele punctului respectiv în plan;

t este timpul.

Pentru a se vizualiza un semnal pe televizor, din semnalul respectiv se iau eșantioane cu frecvența liniilor, realizîndu-se o modulație în poziție a impulsurilor, în funcție de amplitudinile semnalului studiat.

Se introduc următoarele notații:

i — un număr natural care reprezintă indicele unei linii active; pentru standardele TV OIRT și CCIR

$$1 \leqslant i \leqslant 575;$$

Δt_i — deviația (în timp) a poziției impulsului de eșantionare pentru linia i (impuls care corespunde pe ecran unui punct cu strălucirea mai intensă) față de poziția centrală a impulsului în lipsa modulației;

x_i — abscisa punctului luminos de pe ecran, corespunzător liniei i;

T_z — perioada liniilor, egală cu perioada impulsurilor de eșantionare (64 μs);

$s_m(t)$ — semnalul de vizualizat;

$f_0(t)$ — un semnal rectangular eșantionator:

$$f_0(t) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\tau}{2} \\ 0, & t \in \left(-\infty, -\frac{\tau}{2}\right) \cup \left(\frac{\tau}{2}, \infty\right) \end{cases}$$

În lipsa modulației, se obține un set de impulsuri

$$s_0(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_0(t - iT_z),$$

care vor corespunde intensificării strălucirii fiecărei linii în punctul de abscisă x_0, deci se va traduce pe ecran prin obținerea unei linii verticale luminoase.

Se realizează o modulație în poziție de speța a doua (în varianta eșantionării naturale) a succesiunii de impulsuri cu semnalul studiat

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_0(t - iT_z - \Delta t_i);$$

$$\Delta t_i = Cs_m(iT_z + \Delta t_i),$$

unde C este o constantă de proporționalitate.

Deviația Δt_i a poziției în timp corespunde pe ecran unei deviații față de coordonata de referință x_0

$$\Delta x_i = x_i - x_0.$$

Notînd cu V_x viteza de deplasare pe orizontală a fasciculului electronic videoreproducător, se poate scrie:

$$\Delta x_i = V_x \cdot \Delta t_i.$$

Deci

$$\Delta x_i = CV_x S_m(iT_z + \Delta t_i)$$

de unde rezultă că pentru fiecare linie poziția spotului luminos va depinde de nivelul semnalului modulator în momentul respectiv. Pe ecran, ansamblul acestor puncte luminoase formează o curbă continuă, care constituie reprezentarea semnalului de studiat, axa timpului avînd direcția verticalei ecranului tubului cinescop. Prin rotirea cu 90° a sistemului de deflexie pe gîtul tubului cinescop, imaginea devine normală (axa timpului paralelă cu orizontala ecranului).

6.14. *Să se deducă structura unui modulator în poziție a impulsurilor, funcționînd pe baza principiului prezentat în problema 6.13, care, anexat la un televizor standard, să permită cu un efort minim transformarea acestuia în osciloscop, pentru semnale de joasă frecvență.*

Soluție

Structura modulatorului în poziție a impulsurilor este prezentată în figura 6.14,*a*. Acest sistem comportă următoarele etaje:

— etaj limitator (formator de impulsuri dreptunghiulare);
— circuit de derivare;
— integrator;
— comparator;
— etaj de diferențiere și redresare;
— etaj inversor;
— modulator în amplitudine al frecvenței intermediare;
— etaj de adaptare (amplificare sau atenuare).

Funcționarea este ilustrată de formele de undă din figura 6.19,*b*. Semnalul sinusoidal de la oscilatorul de linii al televizorului, cu frecvența $f_z = \frac{1}{T_2} =$ = 15 625 Hz, se aplică la intrarea aparatului.

La ieșirea primului etaj se obțin impulsuri dreptunghiulare cu lățimea palierului superior de aproximativ 12 μs. Aceste impulsuri sînt diferențiate și sînt aplicate la intrarea integratorului, obținîndu-se semnalul liniar-variabil (fig. 6.14,*bδ*) care este condus la prima intrare a comparatorului. Semnalul studiat este trecut printr-un etaj de adaptare (amplificator sau atenuator), care-l aduce la un nivel convenabil, după care se atacă cu el cea de-a doua intrare a comparatorului.

La ieșirea comparatorului se obține un semnal rectangular, durata impulsurilor fiind funcție de amplitudinea semnalului de măsurat în momentul comparării (modulație în durată a impulsurilor, de speța a doua). Semnalul furnizat de comparator este diferențiat (fig. 6.14,*bθ*), după aceea redresat (fig. 6.14,*bε*), conservîndu-se numai flancul anterior. Se obține astfel un tren de impulsuri cu frecvența liniilor, modulate în poziție (tipul eșantionării naturale) cu semnalul de observat. Aceste impulsuri vor modula în amplitudine tensiunea de înaltă frecvență generată de oscilatorul etajului modu-

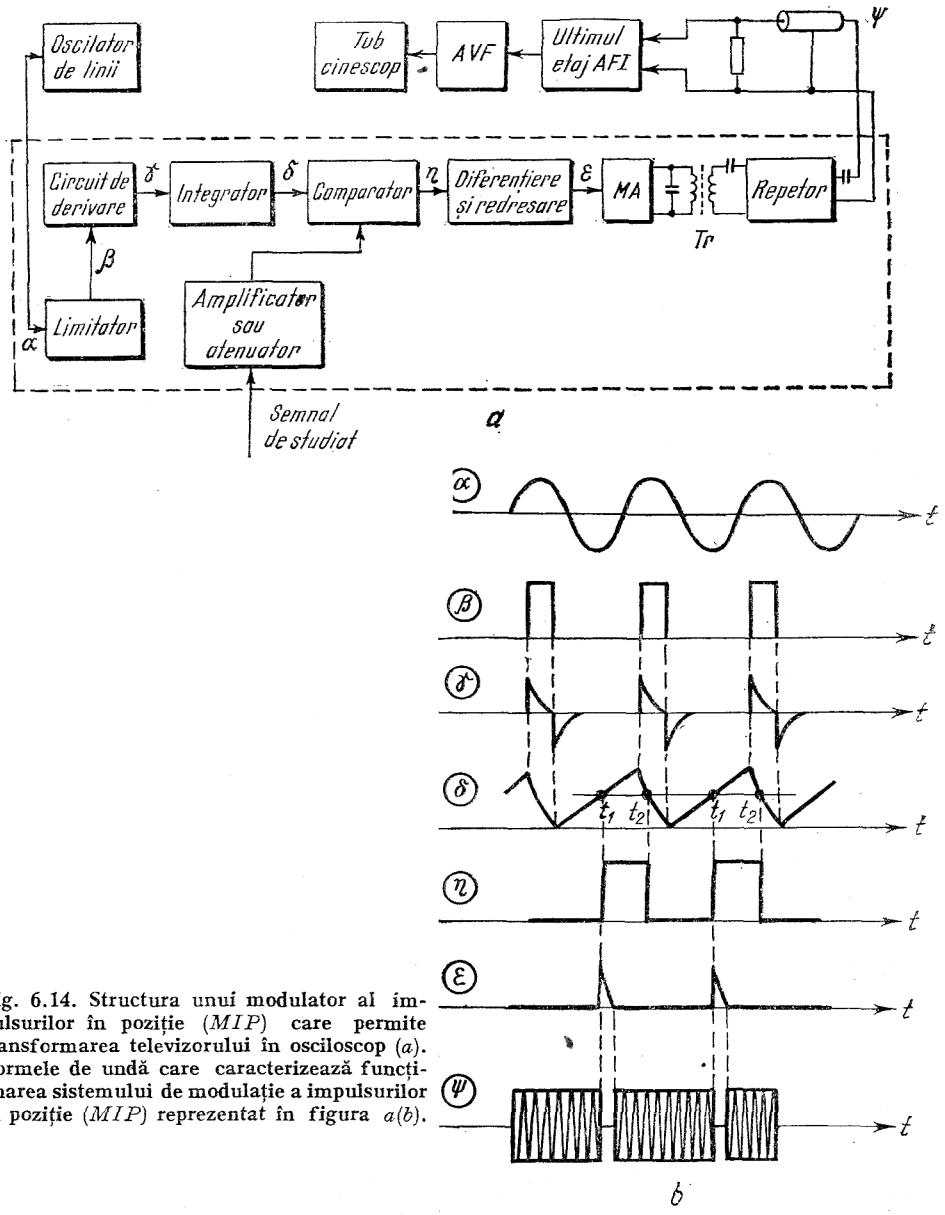


Fig. 6.14. Structura unui modulator al impulsurilor în poziție (*MIP*) care permite transformarea televizorului în osciloscop (*a*). Formele de undă care caracterizează funcționarea sistemului de modulație a impulsurilor în poziție (*MIP*) reprezentat în figura *a*(*b*).

lator *MF* (avînd frecvență egală cu frecvența de acord a celui de-al treilea etaj amplificator de frecvență intermediară — *AFI* — din televizor.)

Prin repetor, semnalul de înaltă frecvență modulat în impulsuri este aplicat ultimului etaj *AFI* din televizor.

Se deconectează etajul separator din televizor pentru că sincronizarea ar anula modulația în poziție a impulsurilor.

6.15. *Se consideră un sistem cu modulație de impulsuri în cod* (MIC) *caracterizat prin* $N = 2^4$ *nivele de amplitudine, cei patru biți corespunzători fiecărui eșantion fiind transmiși simultan prin patru canale* C_1, C_2, C_3, C_4. *Pentru*

fiecare dintre aceste canale informația de „1" sau „0" înseamnă prezența sau absența unui semnal de energie E, *pe durata intervalelor de lungime* τ. *Spectrele de frecvență corespunzătoare semnalelor din canalele* C_1, C_2, C_3, C_4 *sînt diferite, astfel încît benzile de frecvență ale celor patru canale sînt adiacente, lungimile intervalelor ocupate în domeniul frecvență de aceste canale fiind egale* (MIC *cu diviziune în frecvență*).

Se consideră ca element de comparație un sistem cu modulație discretă a frecvenței, caracterizat prin prezența unui impuls numai într-unul dintre cele patru canale menționate anterior; aceste impulsuri au aceeași formă (spectru de frecvență) și energie ca acelea considerate la sistemul MIC *de mai sus.*

Să se realizeze o comparație între cele două sisteme din punctul de vedere al raportului semnal/zgomot de cuantizare pentru un semnal de intrare avînd o lege de repartiție uniformă a amplitudinii eșantioanelor. Se va exemplifica pentru un semnal de intrare liniar-variabil cu viteza de variație q/τ, *unde* q *este cuanta minimă.*

Să se rezolve aceeași problemă pentru cazul unui grup de șase canale (6 biți pe eșantion).

Soluție

În figura 6.15,*a* sînt reprezentate semnalele în cele patru canale în funcție de timp, *pentru sistemul MIC cu diviziune în frecvență*. Un dreptunghi negru reprezintă prezența unui impuls în canal („1"), iar un dreptunghi alb semnifică absența impulsului („0"). Lungimea unui asemenea dreptunghi (pe abscisă) este $\tau = \frac{1}{2W}$, unde W este frecvența maximă din spectrul semnalului de intrare. Înălțimea unui dreptunghi elementar este $\widetilde{W}$, fiind egală cu lățimea benzii de frecvență a unui canal. Secvența de cuvinte de cod din figura 6.15,*a* constituie aproximarea cuantizată a unei schimbări de ampli-

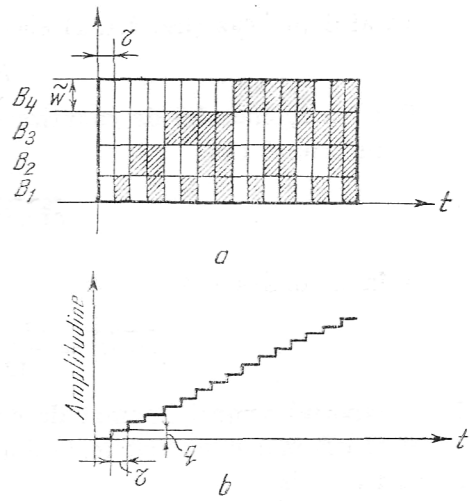


Fig. 6.15, *a*, *b*. **Secvența cuvintelor de cod pentru un sistem MIC cu diviziunea în frecvență** (*a*). **Forma de undă a semnalului cuantizat corespunzător secvenței de cuvinte de cod din figura** *a*(*b*).

tudine liniar-variabilă în timp, cu viteza $\frac{q}{\tau}$, forma de undă cuantizată corespunzătoare fiind reprezentată în figura 6.15,*b*.

În ipoteza în care, utilizînd aceleași patru canale, transmisiunea informației se realizează *cu un sistem cu modulație discretă a frecvenței*, între valorile corespunzătoare domeniilor de frecvență alocate canalelor, se obține secvența codată din figura 6.15,*c*; semnalului modulat din figura 6.15,*c* îi corespunde reprezentarea cuantizată din figura 6.15,*d*.

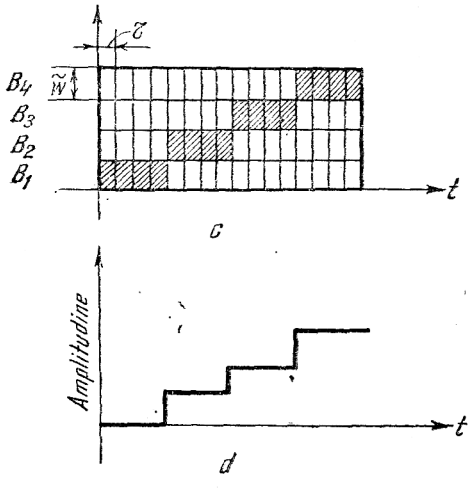


Fig. 6.15, *c,d*. Secvența cuvintelor de cod pentru un sistem cu modulație discretă a frecvenței (*c*). Forma de undă a semnalului cuantizat corespunzător secvenței de cuvinte de cod din figura *c* (*d*).

Cele două sisteme comparate ocupă în domeniul frecvență intervale de lungimi egale, 4 $\widetilde{W}$.

Pentru primul sistem (fig. 6.15,*a*), energia medie pe un interval τ este

$$E_1 = \frac{32E}{16} = 2E.$$

În al doilea caz (fig. 6.15,*c*) energia medie este

$$E_2 = E.$$

Puterea zgomotului de cuantizare este (rel. 6.127)

— în primul caz

$$\widetilde{e^2_{MIC}(t)} = \frac{q^2}{12};$$

— în al doilea caz

$$\widetilde{e^2_{MF}(t)} = \frac{(4q)^2}{12} = 16\ \widetilde{e^2_{MIC}(t)}.$$

Deci, raportul semnal/(zgomot de cuantizare) este în primul caz cu 20 log 16 = 12 dB mai bun decît în al doilea caz, cu o creștere de 3dB a puterii medii transmise.

Pentru șase canale se obține o îmbunătățire de 21 dB a raportului semnal/(zgomot de cuantizare), cu o creștere de 4,77 dB a puterii medii.

6.16. *Se consideră un semnal cu modulație a impulsurilor în cod* (MIC) *având următoarele caracteristici:*

— *numărul impulsurilor binare prin care se transmite un eșantion* $n = 6$;

— *intervalul de timp disponibil pentru transmiterea unui cuvînt (eșantion)* $T = 10$ *ms.*

Se cere să se determine:

a) *frecvența maximă a semnalului continuu, anterior discretizării;*

b) *numărul* N *al nivelelor de cuantizare;*

c) *lărgimea de bandă* B_T *a semnalului* MIC.

Soluție

a) Intervalul de timp dintre două eșantioane consecutive, T, satisface condiția (v. rel. (6.129))

$$T \leqslant \frac{1}{2W}$$

de unde, la limită, se deduce banda semnalului analogic

$$W \leqslant \frac{1}{2T} = \frac{1}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 50 \text{ Hz}.$$

b) Numărul nivelelor de cuantizare

$$N = 2^6 = 64.$$

c) Frecvența biților f_b este (v. rel. (6.129))

$$f_b = \frac{1}{\tau} = \frac{n}{T} = \frac{6}{10 \cdot 10^{-3}} = 600 \text{ biți/s}.$$

Banda canalului digital rezultă

$$B_T \geqslant \frac{1}{2} f_b = 300 \text{ Hz}.$$

6.17. *Se consideră un mesaj având banda* W, *transmis prin modulație de impulsuri binare în cod* (MIC), *cu frecvența de eșantionare a semnalului* $f_0 = 2{,}5$ W.

Se cere să se exprime raportul semnal/zgomot de cuantizare în funcție de raportul $\frac{B_T}{W}$, *în care* B_T *reprezintă lărgimea de bandă ocupată de semnalul digital.*

Se va admite valoarea de vîrf a semnalului $V = 1$ *și se va considera* $\widetilde{m^2(t)} = \frac{1}{2}$.

Să se discute cazurile unei cuantizări cu un număr de nivele $N = 4, 16, 64, 256$.

Soluție

Conform relației (6.128), raportul semnal/zgomot de cuantizare este

$$\left(\frac{S}{P}\right)_q = 3N^2 \frac{\widetilde{m^2(t)}}{V^2}$$

unde (rel. 6.129)

$$N = 2^n,$$

$\widetilde{m^2(t)}$ reprezintă valoarea cuadratică medie a mesajului digital și n—numărul de biți (digiți) prin care este transmis un eșantion cuantizat.

Banda semnalului digital *MIC* (rel. (6.130))

$$B_T \geqslant \frac{1}{2} nf_0 = \frac{1}{2} n \cdot 2{,}5\, W = 1{,}25\, nW.$$

La limită

$$\frac{B_T}{W} = 1{,}25\, n.$$

Rezultă

$$N = 2^{0{,}8 \frac{B_T}{W}};$$

$$\left(\frac{S}{P}\right)_q = 1{,}5 \cdot 2^{1{,}6 \frac{B_T}{W}}.$$

Pentru $N = 4, 16, 64, 256$, raportul $\frac{B_T}{W}$ are valori din tabelul de mai jos

N	4	16	64	256
$\frac{B_T}{W}$	2,5	5	7,5	10

și se pot calcula valorile corespunzătoare ale raportului semnal/zgomot de cuantizare.

6.18. *Se consideră un sistem de transmisiune cu modulație a impulsurilor în cod, caracterizat prin impulsuri de tip „on-off", de amplitudine* A, *perturbate de un zgomot gaussian aditiv cu dispersia* σ *și valoarea medie nulă.*

Pragul de decizie este stabilit la A/2.

Se presupun probabilități egale ale celor două variabile binare.

a) *Să se determine puterea semnalului „on" pentru ca probabilitatea de eroare să fie mai mică decît* 10^{-3}.

b) *Să se explice de ce această putere poate fi mai mică atunci cînd sistemul binar este de tip bipolar* $\left(\text{impulsuri} \pm \frac{A}{2}, \text{prag de decizie zero}\right)$.

Soluție

a) Probabilitatea de decizie eronată este (v. rel. (6.131), (6.132), (6.133):

$$P_e = 1 - F(\rho),$$

unde

$$F(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\rho} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} + \Phi(\rho).$$

Cu datele din enunț,

$$\Phi\left(\frac{A}{2\sigma}\right) > 0{,}499$$

și se deduce

$$\frac{A}{2\sigma} > 3;$$

$$A > 6\sigma.$$

Rezultă că puterea medie a semnalului

$$P_m^{on-off} = \frac{A^2}{2}$$

trebuie să satisfacă inegalitatea

$$\frac{A^2}{2} > 18\sigma^2.$$

b) Dacă se utilizează o formă de undă bipolară pentru transmiterea informației binare, pentru semnalul recepționat Z vor exista două situații posibile:

$Z = \frac{A}{2} + \eta$, cînd la emisie s-a transmis „1";

$Z = -\frac{A}{2} + \eta$, cînd la emisie s-a transmis „0",

unde η reprezintă zgomotul aditiv.

Pentru $Z > 0$, se ia decizia

$$y = y_1,$$

iar pentru $Z < 0$, se ia decizia

$$y = y_0,$$

unde y_1, y_0 corespund valorilor binare „1" sau „0".

Probabilitățile de eroare a lui „1" și „0" sînt respectiv:

$$P_{e_1} = P(y_1 < 0) = P\left(\frac{A}{2} + \eta < 0\right),$$

$$P_{e_0} = P(y_0 > 0) = P\left(-\frac{A}{2} + \eta > 0\right).$$

Probabilitatea medie de eronare este:

$$P_e = P_1 P_{e_1} + P_0 P_{e_0},$$

în care

$P_1 = P_0 = 1/2$ reprezintă probabilitățile egale de emitere a simbolurilor „1", respectiv „0".

Se deduc

$$P_e = \frac{1}{2} - \Phi(\rho)$$

Expresia P_e este identică cu cea de la sistemul de tip „on-off" datorită simetriei condițiilor problemei $\left(P_0 = P_1 = \frac{1}{2}, \text{ impulsuri } \pm\frac{A}{2} \text{ și prag de detecție zero}\right)$.

Din condiția

$$P_e < 10^{-3},$$

rezultă

$$A > 6\sigma$$

și, de aici, se obține condiția pentru puterea medie a semnalului bipolar

$$P_m^{bipolar} = \frac{A^2}{4} > 9\sigma^2.$$

6.19. *Un semnal avînd frecvența maximă din spectru* W *este transmis printr-un canal cu banda* B_T, *utilizînd un sistem de modulație de impulsuri în cod. Fiecare dintre cele* $Q = N^M$ *secvențe posibile de* M *eșantioane succesive (unde fiecare eșantion poate avea* N *valori posibile corespunzător unui număr* N *de nivele de cuantizare a semnalului vîrf la vîrf) este reprezentată prin cîte un eșantion complex, de durată* MT *și avînd* N^M *valori posibile. Să se arate în ce condiții un asemenea sistem de transmisiune poate realiza o compresie de bandă* ($B_T < W$).

Soluție

Dacă T *reprezintă intervalul de timp dintre două eșantioane succesive, atunci un eșantion complex va avea perioada* MT. Conform teoremei eșantionării:

$$T \leqslant \frac{1}{2W},$$

$$MT \leqslant \frac{M}{2W}.$$

Frecvența eșantioanelor complexe este

$$f_0^* = \frac{1}{MT} \geqslant \frac{2W}{M}.$$

Banda corespunzătoare (v. rel. (6.130)) este, pentru $\tau = MT$

$$B_T^* \geqslant \frac{1}{2} f_0^* = \frac{W}{M};$$

$$\frac{W}{M} < W,$$

ceea ce implică

$$M > 1.$$

În particular, dacă $N = 2$ (transmisiune binară) se poate utiliza o grupare în secvențe cu $M \geqslant 2$ a eșantioanelor binare, fiecare secvență fiind transmisă printr-un eșantion complex cu 2^M valori posibile.

Dacă eșantioanele ar fi fost transmise separat, prin impulsuri binare, banda necesară a sistemului digital ar fi fost

$$B_T \geqslant W \log_2 N$$

Compresia de bandă raportată la banda sistemului digital binar, echivalent, corespunzător codării individuale a eșantioanelor, este

$$\eta_D = \frac{W \log_2 N}{\frac{W}{M}} = M \log_2 N,$$

și respectiv compresia de bandă raportată la banda sistemului analogic este

$$\eta_A = \frac{W}{\frac{W}{M}} = M.$$

Dacă cele M *eșantioane se transmit fiecare sub forma unui set de* n *impulsuri*

$$\mu^n = N$$

(generalizarea rel. (6.129)), rezultă frecvența digiților

$$f_0 = n \frac{1}{T} \geqslant 2\ nW.$$

Banda corespunzătoare

$$B_T = \frac{1}{2} f_0 = nW > W,$$

deci în acest caz nu se poate realiza cerința din enunț.

Dacă pachetul de M *eșantioane succesive este transmis sub forma unei secvențe de* K *eșantioane complexe* (K < M), avînd fiecare „Q" valori posibile astfel încît (Q > N)

$$K^Q = N^M,$$

frecvența acestor impulsuri complexe este (M-ary ASK)

$$f_0^{**} = \frac{K}{MT}.$$

Deci, rezultă banda echivalentă a sistemului

$$B_T^{**} = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_*}{MT} \geqslant \frac{K}{M} W.$$

Dar

$$\frac{K}{M} W < W;$$

$$\eta_D = \frac{W \log_2 N}{\frac{K}{M} W} = \frac{M}{K} \log_2 N;$$

$$\eta_A = \frac{W}{\frac{K}{M} W} = \frac{M}{K}.$$

De exemplu, dacă $N = 4$, $M = 4$,

$K^Q = 4^4$;

$Q = 8$;

$K = 2$;

$2^{2 \cdot 4} = 4^4$;

$\eta_D = 4$;

$\eta_A = 2$.

6.20. *Un semnal vocal cu banda limitată la* $W = 3$ *kHz este transmis prin modulație de impulsuri în cod printr-un canal cu banda* $B_T = 20\,000$ *Hz Raportul semnal/zgomot la ieșire trebuie să fie minimum* $18\,000 \frac{\widetilde{m^2(t)}}{V^2}$, *unde* $\widetilde{m^2(t)}$ *reprezintă valoarea pătratică medie a zgomotului de cuantizare, iar* V *— valoarea vîrf la vîrf a semnalului.*

Să se proiecteze un sistem cu modulație în cod de impulsuri (MIC) *corespunzător acestor cerințe.*

Soluție

Din condițiile precizate pentru banda semnalului și a sistemului de transmisiune, cu relația (6.130)

$$B_T \geqslant nW,$$

rezultă numărul de digiți/eșantion

$$n \leqslant 6{,}66.$$

Raportul semnal/zgomot de cuantizare este (rel. (6.128))

$$\left(\frac{S}{P}\right)_q = 3N^2 \frac{\widetilde{m^2(t)}}{V^2} \geqslant 18\,000 \frac{\widetilde{m^2(t)}}{V^2},$$

unde N reprezintă numărul nivelelor de cuantizare.

Rezultă

$$N \geqslant \sqrt{6\,000} \cong 77.$$

Cum:

$$N = \mu^n,$$

în care μ reprezintă numărul de simboluri ale alfabetului canalului de transmisiune ($\mu = 2, 3, 4, \ldots$), se obține:

— pentru $\mu = 2 \rightarrow N_{min} = 2^7 = 128 > 77$,

însă $n = 7$ nu corespunde relației $n \leqslant 6{,}66$;

— pentru $\mu = 3 \rightarrow N = 3^n$;

unde

$$n = 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

asigură

$$N > 77,\ n \leqslant 6{,}66.$$

Stabilind un compromis între gradul de compresie și rezoluție, se alege una dintre valorile de mai sus.

— pentru $\mu = 4 \rightarrow N = 4^n > 77$

conduce la

$$n = 4,\ 5,\ 6.$$

Se poate continua analiza pentru următoarele valori ale lui μ.

Pentru $\mu = N = 77 \rightarrow n = 1$.

Deci, banda canalului

$$B'_T = W \text{ (canal ideal)},$$

realizîndu-se un raport al compresiei de date de

$$\psi = \frac{20\,000}{3\,000} = 6{,}67.$$

6.21. *Se consideră un sistem de cuantizare neliniară cu* N *nivele de amplitudine.* x *reprezintă semnalul de intrare, iar* y *reprezintă semnalul cuantizat.* x_i *sînt limitele subdomeniilor în care este împărțit domeniul de variație a semnalului de intrare, iar* y_i *— valorile corespunzătoare ale semnalului cuantizat, conform algoritmului*

$$x \in (x_i,\ x_{i+1}) \rightarrow y = y_i$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots\ N + 1)$$

Se definește eroarea medie de cuantizare

$$D = E\,[f(x - y)] = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x - y_i) w(x)\, dx,$$

unde E *indică operația de mediere statistică,* f *este o funcție diferențiabilă, iar* w(x) *reprezintă densitatea de probabilitate a semnalului de intrare.*

a) *Presupunînd* N *dat, să se determine caracteristica de cuantizare neliniară optimă (necunoscutele* x_i, y_i) *care asigură minimizarea expresiei* D *(cuantizatorul LLoyd-Max).*

b) *Să se particularizeze relațiile obținute, pentru*

$$f(x) = x^2.$$

c) *Să se rezolve problema pentru o densitate de probabilitate*

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

cu restricțiile $x_{N/2+1} = 0$ (N *par*) *sau* $y_{N+1/2} = 0$ (N *impar*)
Se vor considera cazurile $2 \leqslant N \leqslant 16$.

Soluție

a) Pentru a minimiza eroarea de cuantizare pentru N dat, este necesar să diferențiem D în raport cu x_i și y_i:

$$\frac{\partial D}{\partial x_i} = f(x_i - y_{i-1})w(x_i) - f(x_i - y_i)w(x_i) = 0 \qquad (1)$$

$$(i = 2, \ldots, N)$$

$$\frac{\partial D}{\partial y_i} = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x - y_i)\, w(x)\, dx = 0 \qquad (2)$$

$$(i = 1. \ldots, N)$$

Aceste două relații conduc respectiv la:

$$f(x_i - y_{i-1}) = f(x_i - y_i), \quad (i = 2, \ldots, N); \qquad (3)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x - y_i)\, w(x)\, dx = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad (4)$$

care definesc caracteristica optimă de cuantizare.

b) Pentru

$$f(x) = x^2, \text{ din relația (3) se deduce:} \qquad (5)$$

$$x_i = \frac{y_i + y_{i-1}}{2}; \quad (i = 2, \ldots, N), \qquad (6)$$

iar relația (4) conduce la:

$$y_i = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} xw(x)\, dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} w(x)\, dx}, \quad (i = 1, \ldots, N). \qquad (7)$$

Relatia (7) exprimă faptul că y_i este centrul de greutate al ariei cuprinse între curba $w(x)$, axa OX, verticalele $x = x_i$ și $x = x_{i+1}$.

c) Pentru a rezolva numeric sistemul (6), (7) pentru o densitate de probabilitate simetrică față de origine, se consideră caracteristica de cuantizare numai în cadranul I:

$$x_i \geqslant 0, \left(i = 1, 2, ..., \frac{N}{2} \text{ și } x_1 = 0\right) \text{ pentru } N \text{ par}; \quad (8)$$
$$\left(i = 1,2, ..., \frac{N-1}{2}, \ x_1 \neq 0\right) \text{ pentru } N \text{ impar};$$

$$y_i \geqslant 0, \left(i = 1, 2, ..., \frac{N}{2} \text{ și } y_1 \neq 0\right) \text{ pentru } N \text{ par}; \quad (9)$$
$$\left(i = 1, 2, ..., \frac{N+1}{2} \text{ și } y_1 = 0\right) \text{ pentru } N \text{ impar}.$$

Pentru rezolvarea sistemului (6), (7), (8), (9) cu ajutorul calculatorului, se utilizează un procedeu iterativ.

Se obțin rezultatele din tabelul următor:

TABELUL 6.21

$N = 2$		$N = 3$		$N = 4$		$N = 5$		$N = 6$	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0,0	0,7980	1,224	0,0	0,0	0,4528	0,3823	0,0	0,0	0,3177
			0,6120	0,9816	1,510	1,244	0,7646	0,6589	1,000
							1,724	1,447	1,894
$N = 7$		$N = 8$		$N = 9$		$N = 10$		$N = 11$	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0,2803	0,0	0,0	0,2451	0,2218	0,0	0,0	0,1996	0,1837	0,0
0,8744	0,5606	0,5006	0,7560	0,6812	0,4436	0,4047	0,6099	0,5599	0,3675
1,611	1,188	1,050	1,344	1,198	0,9188	0,8339	1,058	0,9656	0,7524
	2,033	1,748	2,152	1,866	1,476	1,325	1,591	1,436	1,179
					2,255	1,968	2,345	2,059	1,693
									2,426
$N = 12$		$N = 13$		$N = 14$		$N = 15$		$N = 16$	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0,0	0,1684	0,1569	0,0	0,0	0,1457	0,1369	0,0	0,0	0,1284
0,3401	0,5119	0,4760	0,3138	0,2935	0,4413	0,4143	0,2739	0,2582	0,3881
0,6943	0,8768	0,8126	0,6383	0,5959	0,7505	0,7030	0,5548	0,5224	0,6568
1,081	1,286	1,184	0,9870	0,9181	1,086	1,013	0,8512	0,7996	0,9424
1,534	1,783	1,623	1,381	1,277	1,468	1,361	1,175	1,099	1,256
2,141	2,499	2,215	1,865	1,703	1,939	1,776	1,546	1,437	1,618
			2,565	2,282	2,625	2,344	2,007	1,844	2,069
							2,681	2,401	2,733

6.22. *Se consideră un semnal* r *caracterizat printr-o densitate de probabilitate de tip Rayleigh*

$$w(r) = \begin{cases} re^{-r^2/2_{\sigma^2}} & r \geqslant 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$$

a) *Să se realizeze o cuantizare neliniară optimală, în sensul minimizării erorii pătratice medii între semnalul de intrare* r *și semnalul cuantizat* q.

b) *Să se rezolve numeric problema cu ajutorul calculatorului pentru un număr de nivele de cuantizare* N = **2, 4, 8, 16, 32, 64.**

Soluție

a) Cuantizarea optimă este aceea care minimizează eroarea pătratică medie

$$D = \sum_{i=1}^{N} \int_{r_i}^{r_{i+1}} (r - q_i)^2 \, w(r) \, dr, \tag{1}$$

unde algoritmul de codare este exprimat de relația

$$r \in (r_i, r_{i+1}) \rightarrow q = q_i \quad (i = 1, 2, ..., N). \tag{2}$$

Condițiile necesare, deduse din diferențierea parțială a expresiei (1) în raport cu r_i și q_i sînt

$$\frac{\partial D}{\partial q_i} = -2 \int_{r_i}^{r_{i+1}} (r - q_i) w(r) \, dr = 0, \quad (i = 1, 2, ... N) \tag{3}$$

și

$$r_i = \frac{q_i + q_{i-1}}{2}, \quad (i = 2, ..., N) \tag{4}$$

Relația (3) conduce la

$$q_i = \frac{\int_{r_i}^{r_{i+1}} r w(r) \, dr}{\int_{r_i}^{r_{i+1}} w(r) \, dr}, \quad (i = 1, 2, ..., N). \tag{5}$$

b) Sistemul constituit din relațiile (4) și (5) se rezolvă cu ajutorul calculatorului, utilizînd o metodă iterativă.

Se obțin rezultatele tabelate în continuare.

TABELUL 6.22

$N = 2$		$N = 4$		$N = 8$		$N = 16$	
r_i	q_i	r_i	q_i	q_i	r_i	r_i	q_i
1,3748	0,8292	0,8218	0,5293	0,4992	0,3286	0,3018	0,2003
	1,9204	1,4195	1,1144	0,8251	0,6697	0,4920	0,4033
		2,1269	1,7246	1,1351	0,9805	0,6636	0,5806
			2,5291	1,4532	1,2898	0,8270	0,7467
				1,8000	1,6166	0,9869	0,9074
				2,2082	1,9835	1,1464	1,0664
				2,7597	2,4329	1,3083	1,2265
					3,0864	1,4751	1,3902
						1,6497	1,5601
						1,8357	1,7394
						2,0381	1,9321
						2,2645	2,1441
						2,5280	2,3849
						2,8549	2,6710
						3,3181	3,0388
							3,5974

TABELUL 6.22 (continuare)

$N = 32$					
r_i	q_i	r_i	q_i	r_i	q_i
0,1813	0,1207	1,2350	1,1939	2,4297	2,3616
0,2942	0,2420	1,3179	1,2762	2,5732	2,4979
0,3943	0,3464	1,4022	1,3597	2,7336	2,6486
0,4875	0,4422	1,4881	1,4447	2,9177	2,8187
0,5763	0,5328	1,5760	1,5315	3,1371	3,0166
0,6621	0,6198	1,6664	1,6205	3,4159	3,2575
0,7458	0,7044	1,7599	1,7124	3,8209	3,5743
0,8282	0,7873	1,8570	1,8074		4,0676
0,9097	0,8691	1,9584	1,9065		
0,9907	0,9503	2,0650	2,0103		
1,0718	1,0312	2,1780	2,1198		
1,1531	1,1123	2,2989	2,2363		

6.23. *Se consideră un mesaj binar care constituie un element al unui spațiu vectorial cu* $(n + 1) \times m$ *dimensiuni, avînd o reprezentare matricială de forma*

$$\mathbf{X}_h = \begin{pmatrix} x_{0,1} & x_{0,2} & \dots & x_{0,m} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,m} \end{pmatrix},$$

în care

$$x_{i,j} \in \{-1, 1\};$$
$$i = 0, 1, \dots, n;$$
$$j = 1, 2, \dots, m;$$
$$h = 1, 2, \dots, 2; \ (n + 1) \cdot m$$

Se consideră funcțiile

$$f_h(t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_{i,j} \, \alpha_j[t - (i - 1) \, T]$$
$$(h = 1, 2, \dots, 2^{(n+1)m})$$

unde $\alpha_i(t)$ *sînt polinoame care se presupun ortogonale și normalizate pentru* $t \in (0, T)$.

Se consideră operația de modulare definită de corespondența biunivocă dintre elementele $\mathbf{X}_h$ *ale spațiului* $(n + 1) \times m$ *— dimensional al mesajelor și cuvintele de cod* $\mathbf{V}_h$, *aparținînd unui spațiu* m *— dimensional, care se reprezintă în domeniul timp prin funcțiile* $f_h(t)$. *În ipoteza utilizării metodei pentru multiplexarea informației digitale furnizate de* $(n + 1)$ *canale binare, algoritmul de codare este definit de relația*

$$y_{i,j} = x_{i,j}.$$

a) *Să se deducă primele cinci polinoame* $\alpha_j(t)$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$.

b) *Să se reprezintă funcția* $f_h(t)$ *prin care se codează mesajul*

$$\mathbf{X}_h = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluție

a) Din relațiile de ortogonalitate și normalizare

$$\int_0^1 \alpha_k(u)\ \alpha_j(u)\ \mathrm{d}u = 0\ \ (\forall_j,\ k = 0, 1, \ldots, n;\ j \neq k)$$

și

$$\int_0^1 \alpha_j^2(u)\mathrm{d}u = a^2,\quad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

cu

$$u = \frac{t}{T}$$

se deduce

$$\alpha_j(u) = |\,a\,|\,\sqrt{2j+1}\sum_{\substack{k=0\\ \Delta j}}^{j}(-1)^k C_j^k C_{j-k}^k u^k$$

care, prin particularizare, conduc la

$$\alpha_0(u) = a;$$
$$\alpha_1(u) = a\sqrt{3}(1 - 2u);$$
$$\alpha_2(u) = a\sqrt{5}\ (1 - 6u + 6u^2);$$
$$\alpha_3(u) = a\sqrt{7}\ (1 - 12\,u + 30u^2 - 20u^3);$$
$$\alpha_4(u) = a\sqrt{9}\ (1 - 20\,u + 90\,u^2 - 140\,u^3 + 70\,u^4]$$

b) În figura 6.23 este reprezentată forma de undă $f_h(t)$, corespunzătoare codării mesajului $\mathbf{X}_h$.

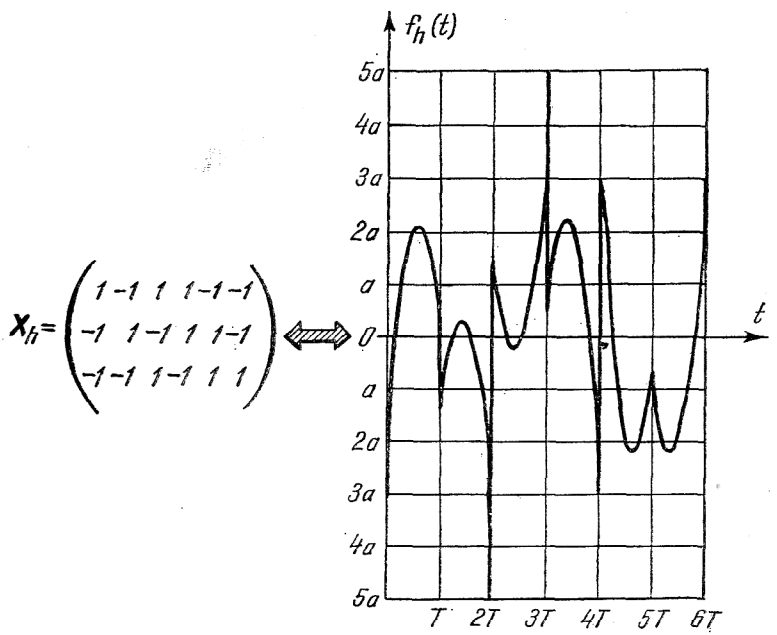


Fig. 6.23. Ilustrarea operației de codare pentru sistemul de modulație în cod de impulsuri polinomiale ortogonale din problema 6.23.

PROBLEME PROPUSE

6.24. *Fie un filtru trece-bandă ideal* (FTB) *cu frecvențele de tăiere* ω_1, ω_2. *La intrarea* FTB *se aplică un impuls* $\delta(t)$. *Cu semnalul de la ieșirea* FTB *se modulează în amplitudine* (MA) *o purtătoare sinusoidală de pulsație* $\omega_0 \gg \omega_2 - \omega_1$. *Se cere să se scrie expresia și să se reprezinte grafic modulul densității spectrale a semnalului modulat.*

6.25. *La intrarea într-un demodulator de anvelopă puterea semnalului util (nemodulat) este* $P_u = 10^{-8}$W, *iar a semnalului perturbator (nemodulat) este* $P_p = 4 \cdot 10^{-12}$ W. *Gradul de modulație* $m = 50\%$. *Impedanța de intrare în demodulator este* $R_D = 100\,\Omega$.

Să se calculeze raportul semnal/perturbație la ieșirea demodulatorului, cînd:

a) *semnalul modulator este sinusoidal;*

b) *semnalul modulator este rectangular (factor de umplere 1/2).*

6.26. *La intrarea demodulatorului de înfășurătoare al unui receptor* MA, *puterea semnalului util nemodulat este* 10^{-8} W, *iar cea a semnalului perturbator nemodulat este* $4 \cdot 10^{-12}$ W. *Impedanța de intrare a demodulatorului este* 100 Ω. *Să se determine raportul semnal/perturbație la ieșirea demodulatorului, știind că gradul de modulație este 0,5, iar mesajul modulator este sinusoidal,*

6.27. *Fie două semnale modulate în amplitudine cu rest de bandă laterală, avînd spectrul de amplitudine ca în figura* 6.27, *unde* ω_0 *este frecvența purtătoarei. Aceste semnale sînt demodulate sincron. Să se analizeze pentru fiecare din ele spectrul de amplitudine al mesajului de la ieșirea demodulatorului și să se arate dacă mesajul de la emisie este reconstituit cu sau fără distorsiuni, (soluție analitică și grafică).*

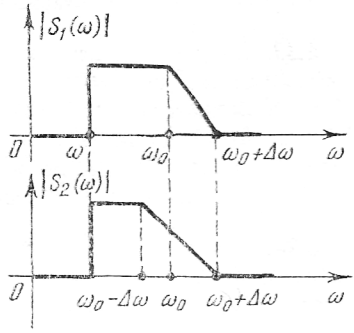


Fig. 6.27.

6.28. *Se presupune că banda laterală superioară a unei unde modulate în amplitudine este atenuată cu un factor de 1/2. Considerînd o modulație cu un singur ton avînd gradul de modulație* $\alpha = 1$, *să se construiască diagrama fazorială și să se exprime anvelopa rezultantă.*

6.29. *Se consideră că banda laterală superioară a unei oscilații modulate în amplitudine este inversată cu 180°. Considerînd o modulație cu un singur ton avînd* $\alpha = 1$, *să se construiască diagrama fazorială și să se exprime anvelopa rezultantă.*

6.30. *Fie mesajul modulator*

$$m(t) = \frac{\sin \Omega t}{\Omega t}$$

și fie purtătoarea

$$A \cos \omega_0 t.$$

a) *Să se determine expresia spectrului semnalului modulat în amplitudine cu purtătoarea suprimată* (MA-PS).

b) *Să se determine și să se reprezinte grafic mesajul de la ieșirea filtrului trece-jos* (FTJ) *al demodulatorului de produs în cazul detecției sincrone, știind că frecvența de tăiere a filtrului este* $\frac{0{,}8\ \Omega}{2\pi}$.

6.31. *Cu un semnal sinusoidal de frecvență* f_m *se modulează în frecvență un emițător* (MF) *și în fază un alt emițător* (MΦ), *astfel încît* $\Delta f = 75$ kHz *și* $\Delta\Phi = 7{,}5$ radiani.

Să se determine lărgimea de bandă cînd frecvența de modulație ia următoarele valori:

a) $f_m = 10$ kHz;

b) $f_m = 1$ kHz.

6.32. *Cu un mesaj sinusoidal avînd frecvența* f_m *se modulează în frecvență* (MF), *respectiv în fază* (MΦ) *două purtătoare identice. Deviația de frecvență este 60 kHz. La intrările în cele două receptoare* (MF *și* MΦ) *este prezent un semnal interferent, diferența dintre purtătoarea utilă și cea perturbatoare fiind 10 kHz.*

Să se determine indicele de modulație β_Φ *și frecvența de modulație* f_m, *astfel încît lărgimile de bandă ale celor două semnale modulate să fie egale și rapoartele semnal/perturbație de asemenea egale.*

6.33. *La intrarea unui receptor cu modulație de frecvență* (MF) *amplitudinea semnalului util este* 10^{-5} *V. Sensibilitatea receptorului este de 100 unități* KT. *Mesajul modulator este o succesiune de impulsuri dreptunghiulare de perioadă 0,5 ms, factor de umplere 0,5 și valoare medie nulă. Deviația de frecvență a semnalului modulat este de 50 kHz.*

Să se determine raportul semnal/zgomot la ieșirea demodulatorului.

6.34. *Două semnale* $s_1(t) = \cos 2\pi \cdot 10\ t$ *și* $s_2(t) = \cos 2\pi 70\ t$ *sînt eșantionate la* $f_0 = 80$ *Hz. Să se arate analitic și grafic că cele două semnale conduc la aceeași formă de undă reconstituită.*

6.35. *Să se discute forma spectrului impulsurilor modulate în amplitudine* (MIA) *în cazul eșantionării naturale, pentru* $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{K}$, *în care* K *reprezintă un număr natural. Particularizări pentru* $K = 2$ *și* $K = 1$.

6.36. *Să se calculeze raportul semnal/zgomot* (S/Z) *la ieșirea demodulatorului, constituit dintr-un filtru trece-jos* (FTJ), *în cazul unei transmisiuni cu modulația în amplitudine a impulsurilor știind că*:

— *sensibilitatea receptorului în unități* KT *este* $\psi = 100$;

— *valoarea de vîrf a impulsurilor de eșantionare nemodulate este* $A = 100$ *mV, la intrarea receptorului*;

— *durata impulsurilor de eșantionare* $\tau = 2$ μs;

— *frontul impulsurilor de eșantionare* $\varepsilon = 0{,}2$ μs;

— *perioada de eșantionare,* T_0, *este jumătate din perioada maximă de eșantionare (conform teoremei de eșantionare)*;

— *mesajul modulator este*

$$m(t) = \alpha \cos \Omega t \text{ cu } \alpha = 0{,}8 \text{ și } \Omega = 2\pi \cdot 10^4.$$

Se vor considera cazurile eșantionării naturale și eșantionării uniforme.

6.37. *Să se determine domeniul de frecvență în care este necesar să se încadreze semnalele care pot fi vizualizate pe ecranul unui receptor de televiziune, utilizînd procedeul de modulație în poziție a impulsurilor prezentat la problema 6.13.*

3.38. *Fie un mesaj al cărui spectru se găsește în banda de frecvență (0—10) kHz. Se realizează o transmisie cu modularea impulsurilor în poziție* (MIA) *cu eșantionare uniformă. Să se determine durata impulsurilor* τ, *pentru ca la punctul de recepție componenta de frecvență 10 kHz să nu fie atenuată față de frecvențele joase cu mai mult de 5%.*

3.39. *Să se calculeze valoarea de vîrf minimă în cazul impulsurilor de eșantionare, la recepție, în c[illegible] IPI, știind că sensibilitatea receptorului este* $\psi = 100$, *iar frontul impulsurilor este* $\varepsilon = 0{,}1$ μs.

6.40. *Să se calculeze raportul semnal/zgomot la ieșirea demodulatorului în cazul unei transmisii cu modulație în poziție a impulsurilor* (MPI) *știind că:*
— mesajul modulator este

$$m(t) = (\Delta p) \cos \Omega t, \quad \Delta p = 3 \ \mu s.;$$

— valoarea de vîrf a impulsurilor de eșantionare $A = 200$ μV;
— sensibilitatea receptorului, în unități KT, *este* $\psi = 100$;
— frontul impulsurilor de eșantionare este $\varepsilon = 0{,}1$ μs.

6.41. *Fie schema bloc din figura 6.41. Mesajului* m(t) *i se aplică o modulație în cod de impulsuri* (MIC) *după care, semnalului rezultant* l(t) *i se aplică o modulație în amplitudine cu purtătoarea suprimată* (MA-PS), *obținîndu-se la ieșire semnalul* s(t). *Știind că lărgimea de bandă a semnalului* s(t) *depășește de 12 ori lărgimea de bandă a mesajului* m(t), *să se determine numărul maxim al nivelelor de cuantizare.*

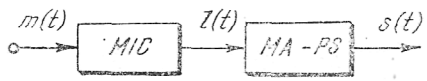


Fig. 6.41. Schema bloc a sistemului de modulație MIC-(MA-PS).

6.42. (*Generalizarea cuantizatorului LLoyd-Max din problema* 6.22).
Fie variabilele aleatoare X *și* Y *cu densitatea de probabilitate compusă* $p_{XY}(x,y)$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$. *Se consideră funcția de distorsiune nenegativă* $\psi(x,y)$. *Se caută o aproximare optimală a lui* X *bazată pe o versiune de cuantizare a lui* X *cu* M *nivele și respectiv pe o versiune de cuantizare a lui* Y *cu* N *nivele. Altfel spus, se caută o funcție cu* M *valori,* $g_M(x)$, *o altă funcție cu* N *valori,* $h_N(y)$ *și o funcție* $F(.,.)$ *avînd domeniul de valori în* Y, *pentru a minimiza*

$$E^2 \equiv E\psi\{X, F[g_M(X), h_N(Y)]\}$$

(E *indică operatorul de mediere statistică.*)

Aplicație: $p_{XY}(x, y) = 1/\pi$, *dacă* $x^2 + y^2 = 1$ *și* $p_{XY}(x, y) = 0$, *în rest;* $M = N = 2$; $\psi(x, y) = (x - y)^2$.

6.43. *Să se deducă schema unui sistem de modulație în cod de impulsuri ortogonale capabil să realizeze algoritmul de codare prezentat în problema 6.23.*

6.44. *Se consideră modelul unui sistem de modulație delta adaptivă a cărui schemă bloc este reprezentată în figura 6.44.*

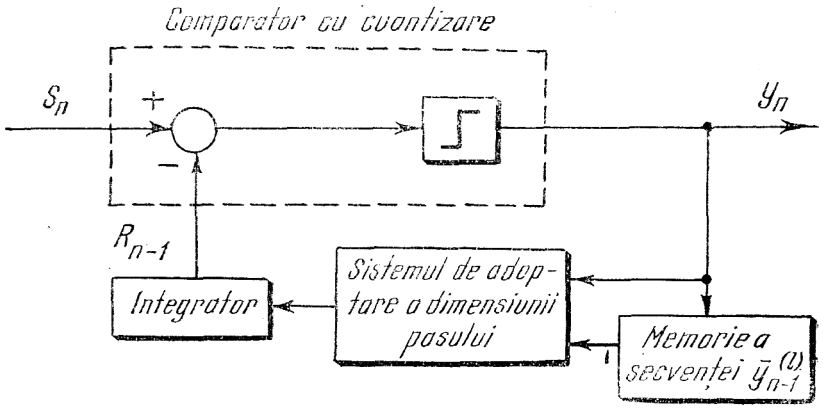


Fig. 6.44. Schema bloc a sistemului de modulație delta adaptivă din problema 6.44.

Se consideră secvența momentelor de timp

$$\bar{t}_n^{(l+1)} \equiv \{t_{n-l}, t_{n-l+1}, \ldots, t_n\},$$

egal distanțate cu T, *la care se aplică secvența de eșantioane ale semnalului de intrare*

$$\bar{S}_n^{(l+1)} \equiv \{S_{n-l}, S_{n-l+1}, \ldots, S_n\}.$$

Bucla de reacție a modulatorului realizează o estimare a semnalului de intrare în forma unei secvențe de eșantioane analogice

$$\bar{R}_n^{(l+1)} \equiv \{R_{n-l}, R_{n-l+1}, \ldots, R_n\}.$$

La ieșirea modulatorului este generată secvență binară

$$\bar{y}_n^{(l+1)} \equiv \{y_{n-l}, y_{n-l+1}, \ldots, y_n\},$$

în care

$$y_m = F\{S_m - R_{m-1}\},$$

funcția F *fiind definită ca*

$$F(u) = \begin{cases} „1“, & \text{pentru } u > 0 \\ „0“, & \text{pentru } u \leqslant 0 \end{cases}.$$

Semnalul reconstituit variază la momentul t_n *cu un pas* Δ_n, *care conform algoritmului Abate-Candy se presupune de forma*

$$\Delta_n = g(\bar{y}_n^{(l+1)}), \tag{1}$$

astfel că

$$R_m = R_{m-1} + \Delta_n.$$

Se consideră o densitate de probabilitate exponențială a gradientelor de amplitudine ale eșantioanelor de intrare ($x = X_{mk} = S_m - S_k$).

$$w_\tau(x) = \frac{1}{2x_0(\tau)} e^{-\frac{|x|}{x_0(\tau)}}, \quad (\tau = t_m - t_k)$$

$X_0(\tau)$ *fiind o tensiune caracteristică.*

Utilizînd criteriul minimizării erorii pătratice medii de cuantizare, se cere să se optimizeze sistemul de adaptare (să se evalueze funcția g din relația (1).

BIBLIOGRAFIE

1. Spătaru, Al. *Teoria transmisiunii informației, vol. I (Semnale și perturbații).* Ed. Tehnică, București, 1966.
2. Carlson, A. B. *Communication systems: an introduction to signals and noise in electrical communication.* Mc. Graw-Hill, New York, 1968.
3. Cartianu, G. *Modulation de fréquence.* Dunod, Paris, 1968.
4. Leitch, C. D., Hershberg, D. L. *A linear AM stereo system using quadrature modulation.* În: IEEE Transactions on Broadcasting, septembrie, 1978, p. 57—61.
5. Sato, M., Murata, M., Namekawa, T. *Pulse interval and width modulation for video transmission.* În: IEEE Transactions on Cable Television, octombrie, 1978, p. 165—173.
6. Neagoe, V. E., *Transformarea televizorului în osciloscop pentru semnale cu spectrul în joasa frecvență, utilizînd modulația în poziție a impulsurilor.* În: Telecomunicații, septembrie, 1973, p. 496—502.
7. Oliver, B. M., Pierce, J. R., Shannon, C. R., *The philosophy of PCM.* În: Proceedings of the IRE, vol. 36, noiembrie, 1948, p. 1 324—1 331.
8. Max, J. *Quantizing for minimum distortion.* În: IRE Transactions on Information Theory, martie 1960, p. 7—12.
9. Lloyd, S. P. *Least squares quantization in PCM.* În: IEEE Transactions on Information Theory, martie 1982, p. 129—137.
10. Papoulis, A. *Probability, random variables, and stochastic processes.* Mc. Graw-Hill, New York, 1965.
11. Beckmann, P. *Probability in communication engineering.* Harcourt, New York, Brace and Wold, Inc., 1967.
12. Pearlman, W. A., Songe, G. H. *Optimal quantization of the Rayleigh probability distribution.* În: IEEE Transactions on Communications, ianuarie, 1979, p. 101—112.
13. Gaardner, N. T., Slepian, D. *On optimal finite-state digital transmission systems* În: IEEE Transactions on Information Theory, martie 1982, p. 167—186.
14. Neagoe, V. E. *Optimal M-ary system with polynomial form pulse code modulation.* În: Proceedings of the IEEE Canadian Conference on Communications and Energy Montreal, octombrie 13—15, 1982.
15. Neagoe, V. E., *Adaptive delta modulation with double delayed decision system for television signals.* În: Révue Roumaine des Sciences Techniques, série Electrotechnique et Énergetique, București, aprilie-iunie, 1980, p. 305—320.

Plan editură nr. 7 264. Coli de tipar; 17
Bun de tipar 21.XII.83

Tiparul executat sub comanda
nr. 432 la
Intreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 89-97
București,
Republica Socialistă România